

**PROCESSI ARCH MULTIVARIATI:  
UNA RASSEGNA METODOLOGICA  
CON APPLICAZIONE  
AL MERCATO DEI FUTURES**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
FACOLTÀ DI ECONOMIA E COMMERCIO  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA E COMMERCIO  
TESI DI LAUREA IN STATISTICA ECONOMICA B**

**RELATORE:**

**Chiar.mo Prof. Luigi Biggeri**

**CORRELATORI:**

**Chiar.mo Prof. Bruno Chiandotto**

**Chiar.mo Prof. Giovanni Maria Marchetti**

**AUTORE:**

**Lorenzo Giolli**

**ANNO ACCADEMICO 1992-1993**

# PREMESSA

Già negli anni '60 alcuni studiosi [Mandelbrot (1963) e Fama (1965)] arguirono che la volatilità delle serie finanziarie, cioè l'ampiezza delle oscillazioni intorno al valore medio (misurata dalle varianze), dipendeva dal tempo.

Recentemente vari ricercatori di finanza applicata e di economia monetaria applicata hanno riconosciuto l'importanza di queste intuizioni producendo numerosi studi su questo argomento con il fine di modellare i momenti secondi condizionati in modo che dipendano dal tempo.

Strumento primario per la verifica empirica di molti di questi studi è stato il processo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), processo dotato di varianza condizionata dipendente dai valori passati del processo stesso, introdotto da Engle (1982a) e le sue varie estensioni.

La letteratura riguardante i modelli ARCH, a partire dall'articolo di Engle (1982a), si è ampiamente sviluppata ed è ormai assai vasta. Alcuni lavori di sistematizzazione dei modelli ARCH, concernenti principalmente l'aspetto univariato, sono già stati proposti [vedi Buzzigoli (1992) e Bollerslev, Chou e Kroner (1992)].

Il presente lavoro ha invece per oggetto i processi ARCH multivariati che, come vedremo in seguito, sono risultati strumenti utili per l'analisi di numerosi aspetti di vari mercati finanziari come ad esempio il mercato dei tassi di cambio e i mercati *futures*.

In ambito finanziario i modelli ARCH multivariati hanno trovato ampia applicazione in tre aree principali di studio [Bollerslev, Chou e Kroner (1992)]: rendimento dei titoli azionari, tassi di interesse e tassi di cambio. Tra le applicazioni ai rendimenti di titoli azionari si ricorda quella di Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) i quali

hanno utilizzato un GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) trivariato per la stima di un modello CAPM (Capital Asset Pricing Model), consistente in tre categorie di titoli (azioni, obbligazioni a breve e a lungo termine). Un approccio analogo è stato adottato da una serie di articoli che analizzano il *trade off* tra la media e la varianza in vari mercati dei capitali [si veda, ad esempio, Giovannini e Jorion (1989), Ng (1991), Engel e Rodrigues (1989) e Engel, Frankel, Froot e Rodrigues (1989), De Santis e Sbordone (1990)].

Altri autori hanno studiato la trasmissione di volatilità tra mercati. Ad esempio, Chan, Chan e Karolyi (1990) utilizzano un GARCH bivariato per analizzare la relazione tra l'indice azionario Standard & Poor's 500 e l'indice azionario *futures* riferendosi a dati dal 1984 al 1986 per un totale di 36500 osservazioni. Gli autori rilevano che l'introduzione dei mercati *futures* incrementa la volatilità nel corrispondente mercato *cash* (risultato già noto nella letteratura dei mercati *futures*, si veda ad esempio Figlewski (1981)) e viceversa. Conrad, Gultekin e Kaul (1990) hanno adottato un modello GARCH multivariato per studiare la trasmissione di volatilità all'interno del mercato azionario.

Per quanto riguarda le applicazioni ai tassi di interesse, Evans e Wachel (1990) hanno esaminato gli effetti delle variazioni della produzione e dell'inflazione sui tassi di interesse tramite l'equazione di Fisher generalizzata derivata dal CAPM, utilizzando dati mensili e una procedura di stima indiretta a due stadi.

Infine, varie applicazioni hanno avuto per oggetto lo studio dei tassi di cambio. In Bollerslev (1990) si analizzano, tramite un modello GARCH multivariato a correlazioni costanti gli effetti dell'introduzione del Sistema Monetario Europeo sulla volatilità dei tassi di cambio (rispetto al dollaro) di cinque monete Europee. Uno studio analogo è stato effettuato anche da Diebold e Pauly (1988). Altri studi hanno analizzato gli effetti, in un contesto GARCH, degli interventi delle banche centrali sulle dinamiche dei tassi di cambio [vedi Connolly e Taylor (1990)]; risultato comune di questi studi è la correlazione positiva tra l'intervento corrente e la volatilità dei tassi di cambio. Kroner e Lastrapes (1990) hanno utilizzato un modello GARCH(1,1)-M (GARCH-in-Mean) multivariato per mostrare che la volatilità del tasso di cambio influisce significativamente sul livello e sul valore del commercio di una economia.

In uno studio analogo Kroner e Claessens (1990), utilizzando un GARCH(1,1) multivariato, presentano un modello dinamico di *hedging*<sup>1</sup> basato su un CAPM in cui l'*hedging* ottimale sul portafoglio è funzione delle varianze e covarianze condizionate.

Altre applicazioni nel campo dell'*hedging* dinamico sono quelle sui mercati *futures* fatte da Cecchetti, Cumby e Fliglewski (1988) e da Baillie e Myers (1989).

Il principale obiettivo che ci proponiamo con il presente lavoro è quello di sistematizzare la letteratura riguardante gli ARCH multivariati, dato che, per quanto ci consta, una completa rassegna di tali modelli non esiste. Analizzeremo in dettaglio quindi l'aspetto metodologico delle varie tipologie di modelli ARCH multivariati riassumendo il materiale pubblicato e proponendo inoltre sia dimostrazioni alternative di alcune proposizioni e teoremi già dimostrati nei vari articoli teorici, sia alcune proposizioni, con relativa dimostrazione, di risultati già noti concernenti la matrice delle varianze e covarianze condizionata.

Infine, dato che non siamo a conoscenza di applicazioni sui mercati *futures* svolte per il mercato italiano abbiamo ritenuto opportuno, seguendo quanto fatto negli articoli prima citati, di sviluppare l'analisi empirica che presenteremo a conclusione del lavoro. Volendo ampliare la ricerca sul funzionamento di questi importanti mercati finanziari in un contesto Europeo abbiamo scelto come mercati *futures* oggetto dell'applicazione il Mercato Italiano Futures (MIF) e il London International Financial Futures Exchange (LIFFE).

Il lavoro di tesi risulta quindi così strutturato: i primi tre capitoli sono dedicati alla rassegna metodologica in particolare illustrando prima il modello ARCH multivariato lineare (primo capitolo), successivamente le estensioni di tale modello (capitolo secondo) ed infine i modelli GARCH multivariati (terzo capitolo). Il capitolo quarto presenta una descrizione generale dei mercati *futures* con particolare attenzione al Mercato Italiano Futures (MIF) e al London International Financial Futures Exchange (LIFFE). Il capitolo quinto contiene l'applicazione dei modelli ARCH multivariati e univariati ai due mercati *futures* sopracitati.

---

<sup>1</sup>L'*hedging* è l'uso dei mercati *futures* per ridurre un rischio preesistente sul mercato *cash*. Consiste nell'effettuare una transazione sul mercato *futures* come temporanea sostituta di una analoga transazione sul mercato *cash*.



# Indice

<b>PREMESSA</b>	<b>ii</b>
<b>1 PROCESSO ARCH BIVARIATO LINEARE</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Processo ARCH(1) Bivariato Lineare . . . . .	4
1.3 Condizioni per cui la Matrice delle Varianze e Covarianze Condizionata Risulta Definita Positiva . . . . .	7
1.4 Stima del Processo ARCH(1) Bivariato Lineare . . . . .	22
1.5 Test di Ipotesi sul Processo ARCH(1) Lineare Bivariato . . . . .	36
<b>2 ESTENSIONI DEL PROCESSO ARCH LINEARE</b>	<b>37</b>
2.1 Introduzione . . . . .	37
2.2 Processo ARCH Diagonale Lineare Bivariato . . . . .	38
2.2.1 Caratteristiche del Processo . . . . .	38
2.2.2 Stima del Processo ARCH Diagonale . . . . .	43
2.3 Processo ARCH(p) Modificato . . . . .	44
2.4 Processo ARCH Bivariato con Fattore Latente . . . . .	45
2.4.1 Caratteristiche del Processo . . . . .	45
2.4.2 Stima del Processo ARCH Bivariato con Fattore Latente . . . . .	48
<b>3 PROCESSI GARCH BIVARIATI</b>	<b>50</b>
3.1 Introduzione . . . . .	50
3.2 Processo GARCH(p,q) Univariato . . . . .	50
3.3 Processo GARCH(p,q) Lineare Bivariato . . . . .	51

3.4	Processo GARCH BEKK . . . . .	54
3.5	Processo GARCH Bivariato a Correlazioni Costanti . . . . .	57
3.5.1	Caratteristiche del Processo . . . . .	57
3.5.2	Stima del Processo GARCH a Correlazioni Costanti . . . . .	60
<b>4</b>	<b>MERCATI FUTURES</b>	<b>63</b>
4.1	Introduzione . . . . .	63
4.2	Contratti Futures . . . . .	64
4.2.1	Nozioni Generali e Cenni Storici . . . . .	64
4.2.2	Caratteristiche dei Contratti Futures . . . . .	67
4.2.3	Tipologie di Contratti Futures . . . . .	69
4.2.4	Differenze tra Contratti Futures e Forward . . . . .	70
4.3	Il London International Financial Futures Exchange (LIFFE) . . . . .	72
4.4	Il Mercato Telematico dei Titoli Di Stato (MTS) . . . . .	78
4.5	Il Mercato Italiano dei Futures (MIF) . . . . .	81
4.6	Caratteristiche dei Prezzi Futures . . . . .	91
4.6.1	Distribuzione delle Differenze Prime dei Prezzi Futures . . . . .	91
4.6.2	La Volatilità dei Prezzi Futures . . . . .	92
4.7	Hedging . . . . .	94
4.7.1	Nozioni Generali . . . . .	94
4.7.2	Teoria Tradizionale per Trovare Hedge Ratio Ottimo . . . . .	97
4.7.3	Hedging Dinamico . . . . .	99
4.7.4	Approccio Proposto da Baillie e Myres per Trovare l'Hedge Ratio Ottimo . . . . .	100
4.8	Elenco Abbreviazioni . . . . .	103
<b>5</b>	<b>APPLICAZIONE AL MERCATO DEI FUTURES</b>	<b>110</b>
5.1	Introduzione . . . . .	110
5.2	Descrizione dei Dati . . . . .	111
5.3	Analisi Univariata . . . . .	113
5.3.1	Processo Random Walk . . . . .	113
5.3.2	Processo GARCH Univariato . . . . .	114

5.4	Analisi Bivariata . . . . .	115
5.5	Conclusioni . . . . .	118
	<b>Bibliografia</b>	<b>174</b>

# Capitolo 1

## PROCESSO ARCH BIVARIATO LINEARE

### 1.1 Introduzione

Il presente capitolo si propone di esaminare il processo ARCH(p) multivariato lineare introdotto da Engle e Kraft (1983) come generalizzazione dell'analogo univariato proposto da Engle (1982a).

La sigla ARCH significa Auto-Regressive Conditional Heteroskedastic ossia processo ad eteroschedasticità condizionata : caratteristica di tale processo è infatti quella di possedere la varianza condizionata dipendente da p valori passati del processo stesso. Ad esempio, posto  $\Psi_{t-1}$  l'insieme delle informazioni del processo stocastico  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  e  $h_t$  funzione misurabile rispetto a  $\Psi_{t-1}$ , il processo ARCH univariato può essere scritto come

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (1)$$

con

$$h_t = f(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}; \alpha).$$

Un esempio, il più semplice e forse il più noto, di parametrizzazione della varianza condizionata è

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad (2)$$

in cui  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ . Il modello formato dalla 1 e dalla 2 è chiamato ARCH(p) lineare univariato in cui  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$  e p indica l'ordine del processo.

L'elevata volatilità delle serie storiche finanziarie (ad esempio rendimenti di titoli azionari, tassi di interesse, tassi di cambio) negli anni '70 e '80 richiamò l'attenzione degli studiosi sul problema dell'eteroschedasticità condizionata.

Engle (1982a) introdusse i processi ARCH con lo scopo primario di generalizzare l'assunzione fatta da gran parte dei modelli econometrici tradizionali di varianza condizionata costante per la previsione ad un periodo. Tali modelli rappresentano un'estensione naturale dei modelli ARMA classici, in cui si ipotizza che la varianza condizionata dipenda in ogni istante dall'insieme di informazioni in quel momento disponibili: la varianza condizionata viene considerata endogena, in quanto variabile casuale generata dalle realizzazioni passate della serie temporale, e viene quindi esplicitata una distinzione tra momenti secondi condizionati e non condizionati simile a quella tra momenti primi condizionati e non condizionati tipica dei modelli ARMA tradizionali.

Per chiarire meglio il concetto riportiamo un esempio. Consideriamo un generico processo AR(1):  $\varepsilon_t = \psi\varepsilon_{t-1} + u_t$  in cui  $u_t \sim WN(0, \sigma^2)$  e  $|\psi| < 1$ . Indicando con  $\Psi_{t-1}$  l'insieme di informazioni disponibili al tempo  $t-1$ , i momenti condizionati e non condizionati di tale processo risultano rispettivamente:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) &= \psi\varepsilon_{t-1}, \\ \text{VAR}(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) &= \sigma^2, \quad \forall t \in Z \\ &e \\ E(\varepsilon_t) &= 0, \\ \text{VAR}(\varepsilon_t) &= \frac{1}{1-\psi^2}\sigma^2, \quad \forall t \in Z. \end{aligned}$$

Quindi, mentre la media non condizionata è costante, la media condizionata dipende dai valori passati. Come è ben noto, il fatto che la media condizionata dipenda da  $\varepsilon_{t-1}$  permette di utilizzare l'informazione passata per prevedere i valori futuri del processo e di ottenere così notevoli miglioramenti in campo previsivo rispetto ad altri tipi di modelli.

Al contrario, sebbene tra loro diverse, la varianza condizionata e non condizionata sono entrambe costanti: la varianza condizionata non è quindi di alcuna utilità nel

modellare le variazioni dell'incertezza.

È allora presumibile attendersi ulteriori miglioramenti nei risultati qualora si riuscisse a specificare dei modelli in cui anche la varianza condizionata varia nel tempo [Buzzigoli(1992)]. I processi ARCH sono stati infatti applicati con successo proprio alle serie temporali riguardanti fenomeni finanziari come ad esempio l'inflazione, [vedi Engle (1982a, 1983)], rendimenti di titoli azionari [Engle e Mustafa (1992)], *index returns* [Akgiary (1989)], mercati *futures* [Schwert (1990)], tassi di interesse [Weiss (1984) e Engle, Lilien e Robins (1987)] e tassi di cambio [Diebold e Nerlove (1989)].

Esigenze applicative di tipo finanziario hanno portato a numerose parametrizzazioni alternative della varianza condizionata. Tra queste la più nota è quella di Bollerslev (1986) che ha introdotto il processo GARCH(p,q) (ossia Generalized ARCH), in cui la varianza condizionata è

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta h_{t-i},$$

cioè dipende anche dai suoi stessi valori passati. Anche i modelli GARCH sono stati adattati a rendimenti di titoli azionari [French, Schwert e Stambaugh (1987)], tassi di interesse [Hong (1988)] e tassi di cambio [Hsieh (1989)]. I processi GARCH saranno analizzati nel capitolo 3. Ulteriori parametrizzazioni della varianza condizionata sono l'EGARCH (Exponential GARCH) e l'ARCH-M (ARCH-in-Mean) introdotte rispettivamente da Nelson (1990) e da Engle, Lilien e Robins (1987).

Nell'estensione multivariata è la matrice delle varianze-covarianze condizionata a dipendere dai valori passati del processo ARCH; la prima applicazione si deve a Engle, Granger e Kraft (1984) che hanno combinato gli errori di previsione di due modelli, monetarista e mark-up, per spiegare l'inflazione negli Stati Uniti.

Il presente capitolo è diviso in 3 ulteriori paragrafi: nel paragrafo 1.2 vengono esaminate le caratteristiche generali del modello, mentre nel paragrafo 1.4 e 1.5 tratteremo rispettivamente la stima e il test di ipotesi per il processo ARCH multivariato.

I risultati più importanti del primo capitolo sono il teorema 1.3.1, la proposizione 1.3.3 e il teorema 1.3.3. Il teorema 1.3.1 fornisce le 'condizioni teoriche' necessarie

e sufficienti affinché la matrice delle varianze-covarianze condizionata sia definita positiva, la proposizione 1.3.3 invece le ‘condizioni pratiche’<sup>1</sup>. Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema 1.3.1 allora il processo non condizionato  $\{\varepsilon_t\}$   $t = 1, 2, \dots, T$  è stazionario in senso lato. Il teorema 1.3.3 fornisce le condizioni affinché il processo non condizionato sia indipendente dal tempo.

Proposizioni, teoremi e corollari sono tratti da Engle e Kraft (1983). Le formule più importanti, che in Engle e Kraft (1983) sono contenute nel testo, saranno espresse in proposizioni. Le dimostrazioni non riportate in Engle e Kraft (1983) e le dimostrazioni alternative saranno espressamente indicate rispettivamente con le diciture ‘Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)’ e ‘Alternativa ad Engle e Kraft (1983)’.

Per semplicità e per ragioni di spazio verrà trattato esclusivamente il processo ARCH(1) bivariato; la restrizione non è eccessivamente limitante perché il modello originale è molto complesso soprattutto a fini applicativi. Nel capitolo successivo infatti analizzeremo le estensioni del processo ARCH lineare sorte proprio per semplificare l’applicazione pratica dei modelli ARCH multivariati. Come vedremo in seguito l’obiettivo primario di questi modelli è di ridurre il numero dei parametri da stimare e di semplificare le procedure di stima mantenendo inalterate le proprietà essenziali dell’ARCH lineare.

## 1.2 Processo ARCH(1) Bivariato Lineare

Sia  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  un processo stocastico multivariato continuo a parametro discreto. Se  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  permette la rappresentazione

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t,$$

$$Z_t \text{ i. i. d.}, E[Z_t] = 0, VAR[Z_t] = I, \forall t \in Z,$$

allora  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  è chiamato ARCH(p) multivariato.

$H_t = H_t^{1/2} H_t^{1/2}$  è la matrice delle varianze-covarianze condizionata che per definizione di matrice delle varianze-covarianze è simmetrica. Inoltre  $H_t$  è supposta

<sup>1</sup>Per ‘condizioni pratiche’ si intendono le condizioni che riguardano i parametri del modello ARCH. Le ‘condizioni teoriche’ invece agiscono sugli elementi della matrice delle varianze-covarianze condizionata che possono essere espressi come combinazioni lineari dei parametri del modello.

reale, definita positiva<sup>2</sup>, dipendente dal tempo e tale che i suoi elementi sono funzioni misurabili di  $p$  valori  $\Psi_{t-1}$ , l'insieme delle informazioni al tempo  $t - 1$ .

I primi due momenti condizionati del processo ARCH(p) multivariato risultano

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}] &= H_t^{1/2} E[Z_t] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$VAR[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}] = H_t, \quad \forall t \in Z.$$

Dai momenti condizionati del processo si ricavano i corrispondenti momenti non condizionati<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t] &= E[E[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VAR[\varepsilon_t] &= E[VAR[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}]] + VAR[E[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}]] \\ &= E[H_t], \quad \forall t \in Z. \end{aligned}$$

Ovviamente, è utile conoscere le condizioni per cui  $E[H_t]$  sia indipendente da  $t$  per il processo ARCH(p) bivariato lineare, tali condizioni saranno riportate nel teorema 1.3.3, per il caso  $p = 1$ .

Assumendo che  $Z_t \sim N(0, I)$  allora la funzione di densità di probabilità condizionata di  $\varepsilon_t$  rispetto a  $\Psi_{t-1}$  è normale multivariata  $\forall t \in Z$ . In questo caso il processo

<sup>2</sup>Essendo  $H_t$  per definizione simmetrica, reale e definita positiva  $H_t^{1/2}$  è simmetrica, reale e definita positiva. Si dimostra che

$$H_t^{1/2} = Q' \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_N^{1/2}) Q,$$

dove  $Q$  e  $\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_N^{1/2}$  sono rispettivamente una matrice  $N \times N$  le cui colonne sono gli autovettori di  $H_t$  e i corrispondenti autovalori di  $H_t$  [Mathai e Provost (1992)].

<sup>3</sup>Si ricordi che [Mood, Graybill e Boes (1974)]

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[E(Y|X)] \\ &e \\ VAR[Y] &= E[VAR(Y|X)] + VAR[E(Y|X)]. \end{aligned}$$



ARCH(p) multivariato può essere scritto sinteticamente con la notazione

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t).$$

Ipotizzando poi che ogni elemento di  $H_t \equiv H(\Psi_{t-1}) \equiv [H_{ij,t}]$  sia uguale ad una costante più una somma di forme quadratiche in  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$  si ottiene un ARCH(p) multivariato lineare, indicato sinteticamente con la scrittura

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \sum_{k=1}^p \varepsilon'_{t-k} \Omega_{ij,k} \varepsilon_{t-k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ e } k = 1, 2, \dots, p \quad \forall t \in Z. \quad (3)$$

Dove  $\Omega_{ij,k}$  è una matrice simmetrica per  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Il numero dei parametri diversi dai quali dipende la matrice delle varianze-covarianze condizionata è

$$\frac{(n^2 + n)}{2} + p \left( \frac{n^2 + n}{2} \right)^2.$$

Per un ARCH(3) trivariato, ad esempio, il numero dei parametri da stimare è 222, quindi molto elevato. Nei capitoli successivi verranno esaminati modelli che grazie a parametrizzazioni particolari risultano più parsimoniosi.

Inoltre, come precedentemente sottolineato nell'introduzione, nel seguito ci limiteremo a descrivere il processo ARCH(1) bivariato lineare: in questo caso  $H_t$  dipende soltanto da  $\varepsilon_{t-1}$ , quindi invece di scrivere  $H(\Psi_{t-1})$ , dove  $\Psi_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ , è sufficiente scrivere  $H(\varepsilon_{t-1})$ .

Sopprimendo il deponente  $k$  nella notazione 3 il processo ARCH(1) bivariato lineare verrà indicato con la notazione

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{ij} \varepsilon_{t-1}, \quad i, j = 1, 2 \quad \forall t \in Z.$$

La matrice delle varianze-covarianze condizionata per tale processo risulta quindi

$$H_t = H(\varepsilon_{t-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} & \alpha_{12} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ \alpha_{12} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} & \alpha_{22} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Il numero dei parametri diversi dai quali dipende la matrice delle varianze-covarianze condizionata è 12. La parametrizzazione di  $H(\varepsilon_{t-1})$  scelta da Engle e Kraft (1983) è sufficientemente generale da far dipendere il generico elemento della matrice  $H_{ij}$ ,  $i = 1, 2$  da ogni quadrato o prodotto incrociato dei componenti di  $\varepsilon_{t-1}$ . L'aggiunta di una costante alla forma quadratica in  $\varepsilon_{t-1}$  ha il duplice scopo di includere l'ipotesi di omoschedasticità condizionata di  $\varepsilon_t$  come caso particolare della parametrizzazione prescelta e di permettere a  $H_t$  di essere definita positiva quando  $\varepsilon_{t-1} = 0$ .

Infatti le condizioni necessarie che vedremo nel teorema 1.3.1 affinché  $H_t$  sia definita positiva permettono al punto  $\alpha^* = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$  con  $\alpha_{11} > 0$  e  $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 > 0$ , di appartenere allo spazio parametrico  $\Theta$ , con  $\Theta \subset R^{12}$ . Se  $\alpha^*$  è il vero vettore dei parametri la matrice delle varianze-covarianze condizionata, essendo  $\Omega_{ij} = 0$   $i, j = 1, 2$  risulta

$$H_t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in Z.$$

In questo caso si ha omoschedasticità condizionata di  $\varepsilon_t$ . Inoltre, supponendo  $\varepsilon_{t-1} = 0$  per un certo  $t-1 \in Z$ , se in  $H_t$  non ci fossero le costanti al tempo  $t$  essa risulterebbe una matrice zero che non è definita positiva.

### 1.3 Condizioni per cui la Matrice delle Varianze e Covarianze Condizionata Risulta Definita Positiva

Le condizioni perché  $H_t$  sia definita positiva sono enunciate nel teorema 1.3.1. Per la dimostrazione si utilizza la proposizione che segue in cui si evidenzia che  $H_t$  può essere vista come la somma di due matrici,  $H_0$  e  $K$ .

**PROPOSIZIONE 1.3.1** *Sia*

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \alpha'_{t-1} \Omega_{ij} \alpha_{t-1}, \quad i, j = 1, 2 \quad \forall t \in Z,$$

un processo ARCH(1) bivariato lineare.  $H_t$  può essere scritta

$$\begin{aligned} H_t &= H_o + (I_2 \otimes \varepsilon_{t-1})' \Omega (I_2 \otimes \varepsilon_{t-1}) \\ &= H_o + K, \end{aligned}$$

dove  $\Omega$  è una matrice  $4 \times 4$  a blocchi i cui elementi sono le matrici  $2 \times 2$   $\Omega_{ij}$   $i, j = 1, 2$  e  $H_o$  è una matrice  $2 \times 2$  contenente le costanti di  $H_t$ .

Dimostrazione (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)).

$$\begin{aligned} H_t &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} & \alpha_{12} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ \alpha_{12} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} & \alpha_{22} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \\ \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= H_o + (I_2 \otimes \varepsilon_{t-1})' \Omega (I_2 \otimes \varepsilon_{t-1}) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= H_o + K. \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

Come precedentemente accennato la scomposizione di  $H_t$  viene sfruttata per dimostrare il teorema seguente

**TEOREMA 1.3.1** Sia  $H(\varepsilon_{t-1})$  la matrice delle varianze-covarianze condizionata del processo ARCH(1) bivariato lineare.  $H(\varepsilon_{t-1})$  è definita positiva per ogni  $t \in Z$  e ogni  $\varepsilon_{t-1} \in R^2$  se e solo se

1.  $H_o$  è definita positiva.
2.  $B = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \Omega_{ij} = \lambda_1^2 \Omega_{11} + \lambda_2^2 \Omega_{22} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12}$  è semidefinita positiva, dove  $\lambda_i \in R, i = 1, 2$ .

Dimostrazione. Per la condizione sufficiente, posto, come nella proposizione precedente

$$K = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} & \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$$

e

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2 \end{pmatrix}' ,$$

bisogna dimostrare che la funzione di due variabili  $f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}) = \lambda' H_t \lambda$  è maggiore di zero per ogni  $\varepsilon_{t-1} \in R^2$ , con  $\lambda \neq 0$  se valgono le condizioni 1 e 2. Infatti:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}) &= \lambda' H_t \lambda \\ &= \lambda' (H_o + K) \lambda \\ &= \lambda' H_o \lambda + \lambda' K \lambda \\ &= \lambda' H_o \lambda + \lambda_1^2 \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} + \lambda_2^2 \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} + \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ &= \lambda' H_o \lambda + \varepsilon'_{t-1} (\lambda_1^2 \Omega_{11} + \lambda_2^2 \Omega_{22} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12}) \varepsilon_{t-1} \\ &= \lambda' H_o \lambda + \varepsilon'_{t-1} B \varepsilon_{t-1} & (4) \\ &\geq \lambda' H_o \lambda & (5) \\ &> 0, & (6) \end{aligned}$$

dove la 4 segue ponendo in evidenza  $\varepsilon'_{t-1}$  premoltiplicato e  $\varepsilon_{t-1}$  postmoltiplicato, la 5 segue perché per ipotesi B è semidefinita positiva, la 6 segue perché per ipotesi  $H_o$  è definita positiva.

Per provare il contrario del teorema 1.3.1 occorre dimostrare che se  $H(\varepsilon_{t-1})$  è definita positiva allora  $H_o$  è definita positiva e B è semidefinita positiva.

Se per ipotesi  $H(\varepsilon_{t-1})$  è definita positiva per tutti i valori di  $\varepsilon_{t-1}$  lo è anche per  $\varepsilon_{t-1} = 0$ . Sostituendo  $\varepsilon_{t-1} = 0$  in  $f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}) = \lambda' H_t \lambda$ , si ottiene

$$f(\lambda_1, \lambda_2; 0) = \lambda' H_o \lambda, \quad (7)$$

la 7 è maggiore di zero per  $\forall \lambda \in R^2$  se e solo se  $H_o$  è definita positiva.

Per provare che se  $H(\varepsilon_{t-1})$  è definita positiva allora B è semidefinita positiva occorre dimostrare la proposizione 1.3.2. In base a quest'ultima, se esiste un  $\varepsilon_{t-1}^*$  che

rende la forma quadratica  $\varepsilon^{*'} B \varepsilon_{t-1}^*$  negativa allora esiste un  $\varepsilon_{t-1}^{\circ}$  ad esso collegato tale che la forma quadratica  $\lambda' H_t \lambda$  è negativa. Quindi se  $H_t$  è definita positiva B deve risultare almeno semidefinita positiva.

**PROPOSIZIONE 1.3.2** *Se esiste un  $\varepsilon_{t-1}^*$  tale che  $\varepsilon_{t-1}^{*'} B \varepsilon_{t-1}^* < 0$ , allora per ogni  $\lambda \neq 0$  esiste un  $\varepsilon_{t-1}^{\circ}$  tale che  $f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}^{\circ}) < 0$ .*

*Dimostrazione.* Posto  $\varepsilon_{t-1}^{*'} B \varepsilon_{t-1}^* = -K_1$ , con  $K_1 > 0$ , e  $\lambda' H_o \lambda = K_2$ , con  $K_2 > 0$  per quanto dimostrato sopra, scegliendo

$$\varepsilon_{t-1}^{\circ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^* \\ \varepsilon_{2t-1}^* \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2K_2}{K_1}},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}^{\circ}) &= \lambda' H_o \lambda + \lambda' K \lambda \\ &= \lambda' H_o \lambda + \varepsilon_{t-1}^{\circ'} B \varepsilon_{t-1}^{\circ} \\ &= K_2 + \varepsilon_{t-1}^{*'} \sqrt{\frac{2K_2}{K_1}} B \sqrt{\frac{2K_2}{K_1}} \varepsilon_{t-1}^* \\ &= K_2 + \frac{2K_2}{K_1} \varepsilon_{t-1}^{*'} B \varepsilon_{t-1}^* \\ &= K_2 + \frac{2K_2}{K_1} (-K_1) \\ &= -K_2 < 0. \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

Quindi se B è indefinita, definita negativa oppure semidefinita negativa esiste un  $\varepsilon_{t-1}$  che rende  $f(\lambda_1, \lambda_2; \varepsilon_{t-1}^{\circ}) < 0$  con  $\lambda \neq 0$ . Tornando al teorema 1.3.1 ciò contraddice l'ipotesi che  $H_t$  sia definita positiva, quindi B deve risultare almeno semidefinita positiva. c.v.d.

Vediamo ora le condizioni necessarie perché B sia semidefinita positiva.

**PROPOSIZIONE 1.3.3** *Condizioni necessarie perché*

$B = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \Omega_{ij}$  *sia semidefinita positiva sono*

$$\begin{aligned} \Omega_{11,11} &\geq 0, \\ \Omega_{11,11}\Omega_{22,11} - \Omega_{12,11}^2 &\geq 0, \\ \Omega_{11,22} &\geq 0, \\ \Omega_{11,22}\Omega_{22,22} - \Omega_{12,22}^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

dove  $\Omega_{s,t,ij}$  rappresenta il generico elemento della matrice  $\Omega_{s,t}$ .

Dimostrazione (Dimostrazione alternativa ad Engle e Kraft (1983)).

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \Omega_{ij} \\ &= \lambda_1^2 \Omega_{11} + \lambda_2^2 \Omega_{22} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12}. \end{aligned}$$

Svolgendo

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \Omega_{11,11} + \lambda_2^2 \Omega_{22,11} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12,11} & \lambda_1^2 \Omega_{11,12} + \lambda_2^2 \Omega_{22,12} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12,12} \\ \lambda_1^2 \Omega_{11,12} + \lambda_2^2 \Omega_{22,12} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12,12} & \lambda_1^2 \Omega_{11,22} + \lambda_2^2 \Omega_{22,22} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12,22} \end{pmatrix}.$$

Gli elementi della matrice  $B$  sono forme quadratiche in  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$ ; indicando con  $B_{ij}$  il generico elemento di posizione  $ij$  della matrice  $B$  essi possono perciò essere riscritti come

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11,11} & \Omega_{12,11} \\ \Omega_{12,11} & \Omega_{22,11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11,22} & \Omega_{12,22} \\ \Omega_{12,22} & \Omega_{22,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Condizioni necessarie perché  $B$  sia semidefinita positiva sono che  $B_{11} \geq 0$  e  $B_{22} \geq 0$ .

Queste condizioni sono soddisfatte quando

$$\begin{aligned} \Omega_{11,11} &\geq 0, \\ \Omega_{11,11}\Omega_{22,11} - \Omega_{12,11}^2 &\geq 0, \\ \Omega_{11,22} &\geq 0, \\ \Omega_{11,22}\Omega_{22,22} - \Omega_{12,22}^2 &\geq 0. \quad c.v.d. \end{aligned}$$

Si possono ricavare anche le condizioni sufficienti perché  $B$  sia semidefinita positiva, che risultano

$$\begin{aligned} B_{11} &\geq 0, \\ B_{11}B_{22} - B_{12}^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Problemi insorgono nell'esprimere la 8 in funzione dei parametri del modello.

Riassumendo, quindi, dalla proposizione 1.3.3 e dal teorema 1.3.1 possiamo derivare le condizioni necessarie, ma non sufficienti, affinché  $H_t$  sia definita positiva per tutti i valori di  $\varepsilon_{t-1}$  in funzione dei parametri:

$$\begin{aligned} \Omega_{11,11} &\geq 0, \\ \Omega_{11,11}\Omega_{22,11} - \Omega_{12,11}^2 &\geq 0, \\ \Omega_{11,22} &\geq 0, \\ \Omega_{11,22}\Omega_{22,22} - \Omega_{12,22}^2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &> 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Le condizioni 9 sono necessarie per  $B$ , le condizioni 10 sono necessarie e sufficienti per  $H_o$ . Si noti che le condizioni 9 e 10 non sono sufficienti per la positività di  $H_t$  in quanto le 9 sono soltanto necessarie per  $B$ .

Ulteriori informazioni si possono ottenere esprimendo la matrice  $H_t$  in una forma alternativa riportata nella seguente proposizione:

**PROPOSIZIONE 1.3.4** *La matrice delle varianze-covarianze vettorizzata,  $\text{vech}(H_t)$ , di un processo ARCH(1) bivariato lineare può essere scritta nella forma<sup>4</sup>*

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_o + A_1\eta_{t-1}, \quad (11)$$

dove  $h_t$ ,  $a_o$ ,  $\eta_{t-1}$  sono vettori  $3 \times 1$  e  $A_1$  è una matrice  $3 \times 3$ .

<sup>4</sup>Considerata, ad esempio, una matrice  $3 \times 3$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

Dimostrazione (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)). Applicando l'operatore  $\text{vech}$  a  $H_t$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \text{vech}(H_t) &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1} \\ \alpha_{12} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{12} \varepsilon_{t-1} \\ \alpha_{22} + \varepsilon'_{t-1} \Omega_{22} \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_{11,11} \varepsilon_{1t-1}^2 + 2\Omega_{11,12} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} + \Omega_{11,22} \varepsilon_{2t-1}^2 \\ \Omega_{12,11} \varepsilon_{1t-1}^2 + 2\Omega_{12,12} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} + \Omega_{12,22} \varepsilon_{2t-1}^2 \\ \Omega_{22,11} \varepsilon_{1t-1}^2 + 2\Omega_{22,12} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} + \Omega_{22,22} \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_{11,11} & 2\Omega_{11,12} & \Omega_{11,22} \\ \Omega_{12,11} & 2\Omega_{12,12} & \Omega_{12,22} \\ \Omega_{22,11} & 2\Omega_{22,12} & \Omega_{22,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Utilizzando la notazione in Engle e Kraft (1983) si pone:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} = a_{01}, \quad \alpha_{12} = a_{02}, \quad \alpha_{22} = a_{03}, \quad \Omega_{11,11} = a_{11}, \quad 2\Omega_{11,12} = a_{12}, \quad \Omega_{11,22} = a_{13}, \\
 \Omega_{12,11} = a_{21}, \quad 2\Omega_{12,12} = a_{22}, \quad \Omega_{12,22} = a_{23}, \quad \Omega_{22,11} = a_{31}, \quad 2\Omega_{22,12} = a_{32}, \quad \Omega_{22,22} = a_{33},
 \end{aligned}$$

per definizione di operatori  $\text{vec}(\cdot)$  e  $\text{vech}(\cdot)$ , si veda Searle (1982), risulta:

$$\text{vech}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

e

$$\text{vec}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}.$$



ottenendo

$$\begin{aligned} \text{vech}(H_t) &= \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= a_0 + A_1 \eta_{t-1}. \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Le condizioni 9 e 10 necessarie per la positività di  $H_t$  espresse nella notazione di Engle e Kraft (1983) diventano:

$$\begin{aligned} a_{11} &\geq 0, \\ a_{11}a_{31} - a_{21}^2 &\geq 0, \\ a_{13} &\geq 0, \\ a_{13}a_{33} - a_{23}^2 &\geq 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a_{01} &> 0, \\ a_{01}a_{03} - a_{02}^2 &> 0. \end{aligned} \tag{13}$$

La 11 è sfruttata da Engle e Kraft (1983) per imporre condizioni aggiuntive alle condizioni necessarie 12 e 13. Queste condizioni, che non garantiscono però la sufficienza, sono

$$\begin{aligned} a_{11}a_{13} - \frac{1}{4}a_{12}^2 &\geq 0, \\ a_{31}a_{33} - \frac{1}{4}a_{32}^2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Se le condizioni 14 sono soddisfatte<sup>5</sup>

$$H_{11,t} = a_{01} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1} & \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix},$$

$$H_{22,t} = a_{03} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1} & \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} \\ \frac{1}{2}a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix},$$

sono entrambi positivi per  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$  essendo  $a_{01} > 0$ ,  $a_{03} > 0$ ,  $a_{11} \geq 0$ ,  $a_{31} \geq 0$ , per le condizioni 12 e 13. Le condizioni 14 hanno il vantaggio di rafforzare le condizioni 12 e 13 ma lo svantaggio di escludere una parte dello spazio parametrico poiché, ad esempio,  $H_{11,t}$  può risultare positivo anche se la forma quadratica  $\varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1}$  assume valore negativo potendo  $a_{01}$  avere un valore assoluto così elevato da eccedere in valore assoluto  $\varepsilon'_{t-1} \Omega_{11} \varepsilon_{t-1}$  per  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ .

Un altro teorema fondamentale è il teorema 1.3.3, che enuncia le condizioni sufficienti per l'esistenza e per l'indipendenza dal tempo della matrice delle varianze-covarianze non condizionata. Se sono soddisfatte tali condizioni è possibile ricavare la matrice non condizionata dai parametri della matrice condizionata. Per la dimostrazione del teorema 1.3.3 occorre premettere la proposizione 1.3.5, la proposizione 1.3.6 e il teorema 1.3.2.

---

<sup>5</sup>Infatti, posto

$$H_t = \begin{pmatrix} H_{11,t} & H_{12,t} \\ H_{12,t} & H_{22,t} \end{pmatrix},$$

condizioni necessarie affinché  $H_t$  sia definita positiva sono  $H_{11,t} > 0$  e  $H_{22,t} > 0$ . Essendo, ad esempio,  $H_{11,t}$  la somma di  $a_{01}$  e una forma quadratica nella matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{13} \end{pmatrix},$$

$H_{11,t}$  risulterà certamente positivo quando

$$\begin{aligned} &a_{01} > 0 \\ &\text{e} \\ &a_{11} \geq 0 \\ &a_{11}a_{13} - \frac{1}{4}a_{12}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che essendo  $a_{01} > 0$  e  $a_{01}a_{03} - a_{02}^2 > 0$ ,  $a_{03}$  deve risultare maggiore di zero.

**PROPOSIZIONE 1.3.5** Sia  $\Sigma = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$  la matrice delle varianze-covarianze non condizionata di  $\varepsilon_t$ . Posto  $\eta_t = \left( \varepsilon_{1t}^2, \varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t}^2 \right)'$ , una matrice<sup>6</sup>  $P$  tale che

$$\text{vec}(\Sigma) = P' E(\eta_t),$$

è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)). Sviluppando l'equazione matriciale  $\text{vec}(\Sigma) = P' E(\eta_t)$ , ossia

$$\begin{pmatrix} E(\varepsilon_{1t}^2) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ E(\varepsilon_{2t}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \\ P_{14} & P_{24} & P_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\varepsilon_{1t}^2) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ E(\varepsilon_{2t}^2) \end{pmatrix},$$

si ricava il sistema di 4 equazioni in 12 incognite

$$\begin{cases} E(\varepsilon_{1t}^2) = P_{11}E(\varepsilon_{1t}^2) + P_{21}E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) + P_{31}E(\varepsilon_{2t}^2) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = P_{12}E(\varepsilon_{1t}^2) + P_{22}E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) + P_{32}E(\varepsilon_{2t}^2) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = P_{13}E(\varepsilon_{1t}^2) + P_{23}E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) + P_{33}E(\varepsilon_{2t}^2) \\ E(\varepsilon_{2t}^2) = P_{14}E(\varepsilon_{1t}^2) + P_{24}E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) + P_{34}E(\varepsilon_{2t}^2) \end{cases} \quad (15)$$

Una soluzione del sistema 15 è:

$$\begin{aligned} P_{11} = 1, \quad P_{21} = 0, \quad P_{31} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad P_{22} = 1, \quad P_{32} = 0, \\ P_{13} = 0, \quad P_{23} = 1, \quad P_{33} = 0, \quad P_{14} = 0, \quad P_{24} = 0, \quad P_{34} = 1. \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Posto  $A(z) = I - A_1 z$  il teorema 1.3.2 collega le radici dell'equazione in  $z$

$$\begin{aligned} \det(A(z)) &= (1 - a_{11}z)(1 - a_{22}z)(1 - a_{33}z) - a_{21}a_{32}a_{13}z^3 - a_{31}a_{12}a_{23}z^3 + \\ &\quad - a_{31}a_{13}z^2(1 - a_{22}z) - a_{32}a_{23}(1 - a_{11}z) - a_{21}a_{12}(1 - a_{33}z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Per maggiori informazioni vedere Richard (1975).

con gli autovalori della matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

**TEOREMA 1.3.2** *Posto*

$$A(z) = I - A_1 z,$$

dove

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'equazione  $\det(A(z)) = 0$  ha soluzioni fuori dall'intervallo  $(-1, 1)$  se e solo se  $-1 < \lambda_i < 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), con  $\lambda_i$  generico autovalore di  $A_1$ .

*Dimostrazione* (Non dimostrata in Lutkephol (1991)). *Posto*

$$|I - A_1 z| = 0, \quad (16)$$

moltiplicando ambo i membri dell'equazione 16 per  $\left(\frac{1}{z}\right)^3$ , con  $z \neq 0$  si ottiene

$$\left(\frac{1}{z}\right)^3 |I - A_1 z| = 0 \left(\frac{1}{z}\right)^3.$$

Ricordando che  $|xA| = x^n |A|$  con  $A$  matrice  $N \times N$  e  $x$  scalare si ha

$$\left|I \frac{1}{z} - A_1\right| = 0,$$

da cui

$$\left|A_1 - I \frac{1}{z}\right| = 0. \quad (17)$$

Perciò posto  $\lambda = \frac{1}{z}$  si ottiene

$$|A_1 - I\lambda| = 0. \quad (18)$$

Le soluzioni, rispetto a  $\lambda$ , dell'equazione 18 sono gli autovalori della matrice  $A_1$ , per cui, posto  $\lambda_i$  il generico autovalore di  $A_1$  e  $z_i$  la generica soluzione dell'equazione 17 si ha  $\lambda_i = \frac{1}{z_i}$   $i = 1, 2, 3$ . Perciò se  $-1 < \lambda_i < 1$  allora  $z_i$  risiede fuori dell'intervallo

$(-1,1)$ , viceversa se  $\lambda_i$  risiede fuori dell'intervallo  $(-1,1)$ . c.v.d.

La proposizione 1.3.6 connette gli autovalori della matrice a blocchi

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

con gli autovalori di  $A_1$ .

**PROPOSIZIONE 1.3.6** Sia  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  generico autovalore di

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  allora  $|\alpha_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  con  $\alpha_i$  generico autovalore di

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione (Alternativa ad Engle e Kraft (1983)).

$$\begin{aligned} \det(B - \alpha I) &= |A_1 - \alpha I| |-\alpha I| \\ &= |A_1 - \alpha I| - |\alpha I| \\ &= -\alpha^3 |A_1 - \alpha I| \\ &= -\alpha^3 \det(A_1 - \alpha I). \end{aligned}$$

L'equazione  $-\alpha^3 \det(A_1 - \alpha I) = 0$  ha soluzioni

$$\alpha_i = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

quindi se  $-1 < \lambda_i < 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  tutti gli autovalori della matrice B stanno nell'intervallo  $(-1,1)$ . c.v.d.

Perciò per il teorema 1.3.2 se l'equazione  $\det(A(z)) = 0$  ha soluzioni fuori dall'intervallo  $(-1,1)$  gli autovalori della matrice  $A_1$  e, per la proposizione 1.3.6, quelli della matrice  $B$  sono compresi nell'intervallo  $(-1,1)$ .

Premesso tutto questo possiamo ora vedere le condizioni per l'esistenza della matrice delle varianze covarianze non condizionata e la stazionarietà di  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  nel teorema 1.3.3.

**TEOREMA 1.3.3** *Sia*

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_o + A_1 \eta_{t-1},$$

*la matrice delle varianze-covarianze vettorizzata di un processo ARCH(1) bivariato lineare. Posto*

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} z,$$

$$\eta_t = (\varepsilon_{1t}^2, \varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t}^2)'$$

e

$$W_t' = (\eta_t', \eta_{t-1}'),$$

se

1.  $W_{t-k}$  converge in distribuzione a una variabile aleatoria con valore atteso limitato per  $K \rightarrow \infty$
2. Le radici dell'equazione  $\det(A(z)) = 0$  ricadono fuori dal cerchio unitario.

Allora

1.  $\Sigma = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$  esiste
2. gli elementi di  $\Sigma$  sono dati da

$$\text{vec}(\Sigma) = P'(I - A_1)^{-1} a_o,$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} E(W_t | \Psi_{t-1}) &= \begin{pmatrix} E(\varepsilon_{1t}^2 | \Psi_{t-1}) \\ E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t} | \Psi_{t-1}) \\ E(\varepsilon_{2t}^2 | \Psi_{t-1}) \\ E(\varepsilon_{1t-1}^2 | \Psi_{t-1}) \\ E(\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} | \Psi_{t-1}) \\ E(\varepsilon_{2t-1}^2 | \Psi_{t-1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_t \\ \eta_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + A_1 \eta_{t-1} \\ \eta_{t-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

la 19 può essere scritta

$$\begin{pmatrix} a_0 + A_1 \eta_{t-1} \\ \eta_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{t-1} \\ \eta_{t-2} \end{pmatrix},$$

per cui posto

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e \\ B &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si ottiene  $E(W_t | \Psi_{t-1}) = b + BW_{t-1}$ . Definendo

$$\begin{aligned} E(W_t) &= E[p \lim_{k \rightarrow \infty} E[W_t | \Psi_{t-k}]] \\ &= E[p \lim_{k \rightarrow \infty} ((I + B + \dots + B^{k-1})b + B^k W_{t-k})] \end{aligned} \tag{20}$$

$$= E\left[\lim_{k \rightarrow \infty} (I + B + \dots + B^{k-1})b + p \lim_{k \rightarrow \infty} B^k W_{t-k}\right] \quad (21)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( (I + B + \dots + B^{k-1})b + E\left(\lim_{k \rightarrow \infty} B^k p \lim_{k \rightarrow \infty} W_{t-k}\right) \right) \quad (22)$$

$$= (I - B)^{-1}b + \lim_{k \rightarrow \infty} B^k E(p \lim_{k \rightarrow \infty} W_{t-k}) \quad (23)$$

dove la 20 segue da Engle (1982a), la 21 segue poiché in B ci sono tutte costanti, la 22 dal fatto che per ipotesi e per la proposizione 1.3.6 gli autovalori<sup>7</sup> della matrice B sono compresi nell'intervallo (-1,1), la 23 segue da quanto precedentemente detto sugli autovalori<sup>8</sup> della matrice B e dal fatto che per ipotesi W è una variabile aleatoria con valore atteso limitato. Si può scrivere quindi

$$E(W_t) = E \begin{pmatrix} \eta_t \\ \eta_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\eta_t) \\ E(\eta_{t-1}) \end{pmatrix} = (I - B)^{-1}b,$$

per cui

$$\begin{aligned} (I - B)^{-1}b &= \left( \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I - A_1 & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Si ricordi che [Deif (1991)] la serie di matrici

$$I + B + B^2 + \dots$$

con B NxN converge alla matrice

$$(I - B)^{-1},$$

se convergono le serie geometriche di ragione  $\lambda_i$

$$1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \dots \quad i = 1, 2, \dots, N$$

dove  $\lambda_i$  è il generico autovalore di B. Le serie geometriche convergono se

$$-1 < \lambda_i < 1 \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

<sup>8</sup>Seguendo Deif (1991) la successione

$$I, B, B^2, \dots$$

con B matrice NxN converge alla matrice zero se  $-1 < \lambda_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . con  $\lambda_i$  generico autovalore di B.



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (I - A_1)^{-1} & 0 \\ I - A_1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (I - A_1)^{-1} a_0 \\ a_0(I - A_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

essendo per la proposizione 1.3.5  $\text{vec}(\Sigma) = P' E(\eta_t)$  si ottiene

$$\text{vec}(\Sigma) = P'(I - A_1)^{-1} a_0. \text{ c.v.d.}$$

Essendo  $I$  e  $P'$  matrici costanti, la matrice delle varianze-covarianze non condizionata dipende esclusivamente dai parametri del modello. È perciò indipendente dal tempo.

La matrice delle varianze-covarianze non condizionata vettorizzata mediante l'operatore  $\text{vec}(\cdot)$  risulta

$$\text{vec}(\Sigma) = \begin{pmatrix} \frac{(1-a_{22})(1-a_{33})-a_{23}a_{32}}{\det(A_1)} a_{01} + \frac{a_{12}(1-a_{33})+a_{32}a_{13}}{\det(A_1)} a_{02} + \frac{a_{12}a_{23}+a_{13}(1-a_{22})}{\det(A_1)} a_{03} \\ \frac{a_{21}(1-a_{33})+a_{23}a_{31}}{\det(A_1)} a_{01} + \frac{(1-a_{11})(1-a_{33})-a_{13}a_{31}}{\det(A_1)} a_{02} + \frac{a_{23}(1-a_{11})+a_{13}a_{21}}{\det(A_1)} a_{03} \\ \frac{a_{21}(1-a_{33})+a_{23}a_{31}}{\det(A_1)} a_{01} + \frac{(1-a_{11})(1-a_{33})-a_{13}a_{31}}{\det(A_1)} a_{02} + \frac{a_{23}(1-a_{11})+a_{13}a_{21}}{\det(A_1)} a_{03} \\ \frac{a_{21}a_{32}+a_{31}(1-a_{22})}{\det(A_1)} a_{01} + \frac{a_{32}(1-a_{11})+a_{31}a_{12}}{\det(A_1)} a_{02} + \frac{(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{21}a_{12}}{\det(A_1)} a_{03} \end{pmatrix}.$$

dove  $\det(A_1)$  è il determinante della matrice  $A_1$ .

## 1.4 Stima del Processo ARCH(1) Bivariato Lineare

Sia

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \alpha'_{t-1} \Omega_{ij} \alpha_{t-1}, \quad i, j = 1, 2 \text{ per } \forall t \in Z,$$

un processo ARCH(1) bivariato lineare. Engle e Kraft (1983) propongono di stimare i 12 parametri di  $H_t$  tramite il metodo di stima della massima verosimiglianza e di ottimizzare la funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$  con il metodo dello *score*.

Chiamato  $\alpha = (a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})'$  il vettore dei parametri incogniti, la funzione di verosimiglianza del campione casuale  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$  è

$$L_{Z_1, Z_2, \dots, Z_T}(\alpha; Z) = (2\pi)^{-T} \prod_{t=1}^T e^{-1/2 Z_t' Z_t}.$$

Posto  $\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t$ , trasformazione biunivoca, dalla teoria sulle distribuzioni di funzioni di variabili aleatorie la funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$  è

$$F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) = F_{Z_1, Z_2, \dots, Z_T}(\alpha; Z_1(\varepsilon), \dots, Z_T(\varepsilon)) |J(\varepsilon)|.$$

Dato che

$$Z_t(\varepsilon_t) = H_t^{-1/2} \varepsilon_t$$

e

$$J = |H_t^{-1/2}|,$$

la funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$  risulta<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) &= (2\pi)^{-T} \prod_{t=1}^T e^{-1/2 \varepsilon_t' H_t^{-1/2} H_t^{-1/2} \varepsilon_t} |H_t^{-1/2}| \\ &= (2\pi)^{-T} \prod_{t=1}^T e^{-1/2 \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t} |H_t^{-1/2}|. \end{aligned}$$

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$  è

$$L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) = -T \ln(2\pi) - 1/2 \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t + \sum_{t=1}^T \ln |H_t^{-1/2}|.$$

Si noti che si può scrivere

$$|H_t^{-1}| = |H_t^{-1/2} H_t^{-1/2}| \quad (24)$$

$$= |H_t^{-1/2}| |H_t^{-1/2}| \quad (25)$$

$$= |H_t^{-1/2}|^2. \quad (26)$$

<sup>9</sup>Essendo  $H_t^{-1/2}$  matrice simmetrica e  $H_t^{-1/2} H_t^{-1/2} = H_t^{-1}$ .

La 24 segue poiché  $H_t^{-1}$  è semidefinita positiva [vedi Mardia, Kent e Bibby (1979)] mentre la 25 vale perché  $H_t$  è una matrice quadrata [vedi Dhyrnes (1984)]. Estrahendo la radice da ambo i membri della 26 si ottiene  $|H_t^{-1}|^{1/2} = |H_t^{-1/2}|$ . Perciò

$$\begin{aligned} \ln|H_t^{-1/2}| &= \ln|H_t^{-1}|^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|H_t^{-1}| \\ &= -\frac{1}{2}\ln|H_t|. \end{aligned}$$

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza può essere riscritto

$$L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) = -T \ln(2\pi) - 1/2 \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln|H_t|.$$

Il logaritmo della funzione di verosimiglianza è una funzione non lineare nei parametri, quindi il sistema

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0,$$

è un sistema non lineare che in generale non può essere risolto con metodi analitici. Come già detto il metodo di ottimizzazione suggerito è il metodo dello *score*. Il funzionamento generale del metodo dello *score* è il seguente [Rao (1973)]: dato il vettore dei parametri  $\alpha$ , il vettore delle stime dei parametri incogniti  $\hat{\alpha}$  si ottiene iterando l'equazione

$$\hat{\alpha}^{i+1} = \hat{\alpha}^i + (\hat{\Lambda}_{\alpha\alpha}^{-1}) \left( \frac{\partial l_t}{\partial \alpha} \right), \quad (27)$$

dove  $\hat{\Lambda}_{\alpha\alpha}$  è la matrice di informazione e  $\frac{\partial l_t}{\partial \alpha}$  è il gradiente del logaritmo della funzione di verosimiglianza, detto *score*, entrambi valutati in  $\alpha = \hat{\alpha}$ .

Il teorema 1.4.1 fornisce lo *score* e la matrice delle informazioni per la 27. Per dimostrare il teorema 1.4.1 occorre prima dimostrare le proposizioni 1.4.1 e 1.4.2.

Nella proposizione 1.4.1 dimostreremo 2 modi alternativi di esprimere  $h_t$ , matrice delle varianze-covarianze condizionata vettorizzata mediante l'operatore *vech*(.).

**PROPOSIZIONE 1.4.1** *Posto*

$$A = (a_0; A_1) = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

dove gli  $a_{ij}$   $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3, 4$ , rappresentano i parametri del modello espressi nella notazione di Engle e Kraft (1983),

$$z_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = \text{vec}(A'),$$

allora  $h_t$  può essere scritta

$$h_t = Az_t,$$

oppure

$$\begin{aligned} h_t &= (I \otimes z_t') \text{vec}(A') \\ &= Z_t \alpha. \end{aligned}$$

con  $Z_t = (I \otimes z_t')$ .

Dimostrazione (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)).

$$\begin{aligned} h_t &= \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{01} + a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2 + a_{12}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} + a_{13}\varepsilon_{2t-1}^2 \\ a_{02} + a_{21}\varepsilon_{1t-1}^2 + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} + a_{23}\varepsilon_{2t-1}^2 \\ a_{03} + a_{31}\varepsilon_{1t-1}^2 + a_{32}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} + a_{33}\varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= Az_t \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
 h_t &= \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1z'_t & 0 & 0 \\ 0 & 1z'_t & 0 \\ 0 & 0 & 1z'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{02} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{03} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \\
 &= (I \otimes z'_t) \text{vec}(A') \\
 &= Z_t \alpha. \text{ c.v.d.}
 \end{aligned}$$

La proposizione 1.4.2 mostra un ulteriore modo per esprimere  $h_t$ . Pernio della dimostrazione è la matrice  $S$ , che consente di esprimere  $\text{vech}(H_t)$  in funzione di  $\text{vec}(H_t)$ . La matrice  $S$  risulterà l'inversa generalizzata di Moore-Penrose della trasposta della matrice  $P$  trovata con la proposizione 1.3.5. Nella proposizione 1.4.2 verranno inoltre dimostrate alcune relazioni tra  $S$  e  $P$ .

**PROPOSIZIONE 1.4.2** Sia  $S$  l'inversa generalizzata<sup>10</sup> di Moore-Penrose di  $P'$ , dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>10</sup>L'inversa generalizzata di  $P'$  risulta  $S = (PP')^{-1}P$ .

Allora  $S$  è tale per cui si ha

$$h_t = Svec(H_t).$$

Inoltre  $S$  e  $P$  soddisfano le seguenti relazioni

1.  $SP' = PS' = I_3$
2.  $P'S = S'P \neq I_4$ .  $P'S$  è idempotente con rango 3.
3. Per ogni matrice  $B$   $2 \times 2$  simmetrica,  $vec(B) = P'Svec(B)$ .

Dimostrazione (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)). Applicando la proposizione 1.3.5 ad  $H_t$  invece che a  $\Sigma$  si ottiene

$$\begin{aligned} vec(H_t) &= P'vech(H_t) \\ &= P'h_t. \end{aligned} \tag{28}$$

Premoltiplicando ambo i membri dell'equazione per

$$S = (PP')^{-1}P,$$

si ottiene

$$(PP')^{-1}Pvec(H_t) = (PP')^{-1}PP'h_t,$$

da cui

$$h_t = Svec(H_t).$$

Per quanto riguarda il punto 1 è facile dimostrare che

$$SP' = (PP')^{-1}PP' = I_3$$

e che

$$PS' = PP'(PP')^{-1} = I_3.$$

Passando al punto 2, svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} P'S = S'P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\neq I_4. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi  $P'S = S'P$  e  $P'S$  è idempotente.

Essendo poi

$$\det(P'S) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0,$$

e il minore che si ottiene cancellando la terza riga e la seconda colonna di  $P'S$  pari a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

il rango di  $P'S$  è 3.

Infine per il punto 3, chiamata

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$\text{vec}(B) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$P'S \text{vec}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix},$$

la relazione 3 è quindi dimostrata. c.v.d.

Il teorema 1.4.1 esprime lo *score* e la matrice delle informazioni in modo tale da poterli agevolmente utilizzare nel metodo di ottimizzazione.

**TEOREMA 1.4.1** *Sia*

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \alpha'_{t-1} \Omega_{ij} \alpha_{t-1}, \quad i, j = 1, 2 \text{ per } \forall t \in Z,$$

un processo ARCH(1) bivariato lineare. Lo *score* e la matrice delle informazioni sono rispettivamente

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha'} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Z'_t \Omega_t^{-1} f_t,$$

$$\Lambda_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} E \left( \sum_{t=1}^T Z'_t \Omega_t^{-1} Z_t \right).$$

**Dimostrazione** (Alternativa ad Engle e Kraft (1983)). La funzione di log-verosimiglianza è

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\alpha; \varepsilon) &= \sum_{t=1}^T \left[ -\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |H_t^{-1}| - \frac{1}{2} \varepsilon'_t H_t^{-1} \varepsilon_t \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \left[ -\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |H_t^{-1}| - \frac{1}{2} \text{tr}(\varepsilon_t \varepsilon'_t H^{-1}) \right] \\ &= \sum_{t=1}^T l_t, \end{aligned}$$



essendo  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \alpha}$  si ottiene<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l_t}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |H_t^{-1}|}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{tr}(\varepsilon_t \varepsilon_t' H_t^{-1})}{\partial \alpha} \\
 &= \frac{1}{2} \text{vec}(H_t)' \frac{\partial \text{vec}(H_t^{-1})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t)' \frac{\partial \text{vec}(H_t^{-1})}{\partial \alpha} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{vec}(H_t)' (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) \frac{\partial \text{vec}(H_t)}{\partial \alpha} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t)' (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) \frac{\partial \text{vec}(H_t)}{\partial \alpha} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{vec}(H_t)' (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t + \frac{1}{2} \text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t)' (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t, \quad (29)
 \end{aligned}$$

la 29 può essere scritta come un vettore colonna

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha'} = \frac{1}{2} Z_t' P (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) \text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t),$$

<sup>11</sup>I seguenti risultati sono tratti da Dyrnes (1984). Posto A matrice simmetrica NxN funzione degli elementi del vettore  $\alpha$  e  $A^* = A^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln |A|}{\partial \alpha} &= \frac{1}{|A|} \frac{\partial |A|}{\partial \alpha} \\
 &= \text{vec}(A^*)' \frac{\partial \text{vec}(A)}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

Posto B matrice MxN e X matrice NxM, con X funzione degli elementi del vettore  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \text{tr}(BX)}{\partial \alpha} = \text{vec}(B)' \frac{\partial \text{vec}(X)}{\partial \alpha}.$$

Sia A matrice NxN simmetrica funzione degli elementi del vettore  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \text{vec}(A^{-1})}{\partial \alpha} = -(A^{-1} \otimes A^{-1}) \frac{\partial \text{vec}(A)}{\partial \alpha}.$$

Inoltre, ricordando la 28 e la proposizione 1.4.1

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(H_t) &= P' h_t \\
 &= P' Z_t \alpha,
 \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\partial \text{vec}(H_t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial P' Z_t \alpha}{\partial \alpha} = P' Z_t.$$

posto<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}\Omega_t^{-1} &= P(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1})P' \\ &e \\ f_t &= Svec(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t) = (\eta_t - h_t),\end{aligned}$$

si può scrivere<sup>13</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \alpha'} &= \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \alpha'} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{2} Z_t' P (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Svec(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Z_t' \Omega_t^{-1} f_t.\end{aligned}$$

Utilizzando la regola<sup>14</sup> della catena e seguendo Pollock (1979)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\alpha} \left[ \frac{\partial l_t}{\alpha'} \right] &= \frac{1}{2} Z_t' P \frac{\partial [vec(H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' H_t^{-1}) - vec(H_t^{-1})]}{\partial vec(H_t^{-1})} \frac{\partial vec(H_t^{-1})}{\partial vec(H_t)} P' Z_t \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P \left[ \frac{\partial vec(H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' H_t^{-1})}{\partial vec(H_t^{-1})} - \frac{\partial vec(H_t^{-1})}{\partial vec(H_t^{-1})} \right] \left( -(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \right) \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P \left[ \left( (H_t^{-1})' (\varepsilon_t \varepsilon_t') \otimes I_2 \right) \frac{\partial vec(H_t^{-1})}{\partial vec(H_t^{-1})} + (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) \frac{\partial vec(\varepsilon_t \varepsilon_t')}{\partial vec(H_t^{-1})} + \right. \\ &\quad \left. + (I_2 \otimes H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t') \frac{\partial vec(H_t^{-1})}{\partial vec(H_t^{-1})} - I_4 \right] \left( -(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \right) \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P \left[ (H_t^{-1} (\varepsilon_t \varepsilon_t') \otimes I_2) + (I_2 \otimes H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' - I_4) \right] \left( -(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \right).\end{aligned}$$

<sup>12</sup>Essendo  $(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t)$  una matrice simmetrica dalla proposizione 1.4.2 segue

$$vec(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t) = P' Svec(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t).$$

<sup>13</sup>Essendo  $H_t^{-1}$  matrice simmetrica si ottiene  $(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1})' = ((H_t^{-1})' \otimes (H_t^{-1})') = (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1})$ .

<sup>14</sup>Seguendo Searle (1982)

$$\begin{aligned}(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) vec(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t) &= (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) vec(\varepsilon_t \varepsilon_t') - (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) vec(H_t) \\ &= vec(H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' H_t^{-1}) - vec(H_t^{-1} H_t H_t^{-1}) \\ &= vec(H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' H_t^{-1}) - vec(H_t^{-1}).\end{aligned}$$

La matrice delle informazioni è

$$\Lambda_{\alpha\alpha} = E \left\{ \sum_{t=1}^T E \left[ -\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} \middle| \Psi_{t-1} \right] \right\}.$$

Lavorando sul generico componente della sommatoria si ottiene

$$\begin{aligned} E \left[ -\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} \middle| \Psi_{t-1} \right] &= E \left[ \frac{1}{2} Z_t' P \left[ (H_t^{-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t') \otimes I_2) + (I_2 \otimes H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t') - I_4 \right] \right. \\ &\quad \left. (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \middle| \Psi_{t-1} \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{2} Z_t' P (H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes I_2) (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \middle| \Psi_{t-1} \right] + \\ &\quad + E \left[ \frac{1}{2} Z_t' P (I_2 \otimes H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t') (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \middle| \Psi_{t-1} \right] + \\ &\quad - E \left[ \frac{1}{2} Z_t' P I_4 (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \middle| \Psi_{t-1} \right] \\ &= E [1^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}] + E [2^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}] + \\ &\quad - E [3^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}]. \end{aligned}$$

Ricordando che  $Z_t$  e che  $H_t$  sono funzioni di  $\Psi_{t-1}$  e che  $E(\varepsilon_t \varepsilon_t' \middle| \Psi_{t-1}) = H_t$  i 3 termini dell'equazione possono essere scritti

$$\begin{aligned} E [1^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}] &= \frac{1}{2} Z_t' P E \left[ H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes I_2 \middle| \Psi_{t-1} \right] (H_t' \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P H_t^{-1} E \left[ \varepsilon_t \varepsilon_t' \middle| \Psi_{t-1} \right] \otimes I_2 (H_t' \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E [2^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}] &= \frac{1}{2} Z_t' P E \left[ I_2 \otimes H_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' \middle| \Psi_{t-1} \right] (H_t' \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P I_2 \otimes H_t^{-1} E \left[ \varepsilon_t \varepsilon_t' \middle| \Psi_{t-1} \right] (H_t' \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \\ &= \frac{1}{2} Z_t' P I_4 (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t, \end{aligned}$$

$$E [3^{\text{o}} \text{termine} \middle| \Psi_{t-1}] = \frac{1}{2} Z_t' P I_4 (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t.$$

Per cui

$$\begin{aligned}
 E \left[ -\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} \middle| \Psi_{t-1} \right] &= \frac{1}{2} Z_t' P I_t (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t + \\
 &\quad + \frac{1}{2} Z_t' P I_t (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t + \\
 &\quad - \frac{1}{2} Z_t' P I_t (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t \\
 &= \frac{1}{2} Z_t' P I_t (H_t^{-1} \otimes H_t^{-1}) P' Z_t,
 \end{aligned} \tag{30}$$

ricordando che

$$\Omega_t^{-1} = P(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1})P',$$

la 30 diventa

$$E \left[ -\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} \middle| \Psi_{t-1} \right] = \frac{1}{2} Z_t' \Omega_t^{-1} Z_t.$$

La matrice delle informazioni è quindi

$$\Lambda_{\alpha\alpha} = E \left[ \sum_{t=1}^T \frac{1}{2} Z_t' \Omega_t^{-1} Z_t \right] = \frac{1}{2} E \left[ \sum_{t=1}^T Z_t' \Omega_t^{-1} Z_t \right]. \text{ c.v.d.}$$

Il corollario 1.4.1 compatta ulteriormente lo *score* e la matrice delle informazioni ottenuti con il teorema 1.4.1.

**COROLLARIO 1.4.1** *Sia*

$$Z' = (Z_1' : \dots : Z_T'),$$

$$f' = (f_1' : \dots : f_T')$$

e  $\Omega$  matrice diagonale a blocchi con blocchi  $\Omega_t$   $t = 1, 2, \dots, T$ . Allora

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} Z' \Omega^{-1} f$$

e

$$\Lambda_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} E[Z' \Omega^{-1} Z].$$

Dimostrazione. Utilizzando i risultati del teorema 1.4.1 si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \alpha'} &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Z_t' \Omega_t^{-1} f_t \\ &= \frac{1}{2} \left[ Z_1' \Omega_1^{-1} f_1 + Z_2' \Omega_2^{-1} f_2 + \dots + Z_T' \Omega_T^{-1} f_T \right] \\ &= \frac{1}{2} Z' \Omega^{-1} f.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T E \left[ Z_t' \Omega_t^{-1} Z_t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T E \left[ Z_1' \Omega_1^{-1} Z_1 + Z_2' \Omega_2^{-1} Z_2 + \dots + Z_T' \Omega_T^{-1} Z_T \right] \\ &= \frac{1}{2} E \left[ Z' \Omega^{-1} Z \right]. \text{ c.v.d.}\end{aligned}$$

L'equazione da iterare diventa quindi

$$\hat{\alpha}^{i+1} = \hat{\alpha}^i + (Z' \hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1} Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}. \quad (31)$$

Dalla 31 si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\alpha}^i &= \hat{\alpha}^{i+1} - \hat{\alpha}^i \\ &= (Z' \hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1} Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}.\end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned}X &= \hat{\Omega}^{-1/2} Z \\ e \\ Y &= \hat{\Omega}^{-1/2} \hat{f},\end{aligned}$$

con  $\Omega^{-1/2}$  e  $f$  valutate per  $\alpha = \hat{\alpha}^i$ ,  $\Delta \hat{\alpha}^i$  può essere visto come la stima OLS di una regressione<sup>15</sup> di Y su X: quindi la procedura di stima del metodo dello *score* applicato

<sup>15</sup>La funzione di regressione è

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_{12} x_{i12} + \gamma_i \quad i = 1, 2, 3.$$

al processo ARCH è notevolmente semplificata dal fatto che può essere ridotta ad una successione di stime OLS su apposite variabili. La stima di massima verosimiglianza di  $\alpha$  è quel valore  $\hat{\alpha}$  tale che  $Z' \hat{\Omega}^{-1} f = 0$ . La stima della matrice delle varianze-covarianze<sup>16</sup> di  $\Delta \hat{\alpha}^i$  è

$$\hat{\sigma}^2 (Z' \hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1},$$

dove

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T} - \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} Z (Z' \hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1} Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T}. \quad (32)$$

Al passo finale della procedura di convergenza<sup>17</sup> la 32 diventa

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T}.$$

Per dimostrare che

$$\frac{2}{6} \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T} (Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f})^{-1},$$

è una stima consistente di  $\Lambda_{\alpha\alpha}^{-1}$  occorre dimostrare il teorema 1.4.2

**TEOREMA 1.4.2** *Per un ARCH(1) bivariato lineare*

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T} = 6$$

e

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon' H^{-1} \varepsilon}{T} = 2.$$

Per la dimostrazione si veda Engle e Kraft (1983).

Perciò [Judge, Griffiths, Hill e Lutkepohl (1980)]

$$\begin{aligned} p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{6} (Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f})^{-1} &= p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \frac{\hat{f}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f}}{T} p \lim_{T \rightarrow \infty} 2 (Z' \hat{\Omega}^{-1} Z)^{-1} \\ &= 2E \left[ (Z' \Omega^{-1} Z)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Se le condizioni in Crowder (1976) sono soddisfatte

$$\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow N(0, \Lambda_{\alpha\alpha}^{-1}).$$

<sup>16</sup>La matrice delle varianze-covarianze di  $\Delta \hat{\alpha}^i$  differisce soltanto per uno scalare da  $\Lambda_{\alpha\alpha}^{-1}$ .

<sup>17</sup>Si ricorda che  $Z' \hat{\Omega}^{-1} \hat{f} = 0$ .

## 1.5 Test di Ipotesi sul Processo ARCH(1) Lineare Bivariato

In Engle e Kraft (1983) è stato proposto di utilizzare il test dei moltiplicatori di Lagrange<sup>18</sup> per test di ipotesi in processi ARCH lineari. Il vantaggio di questo metodo è di poter testare l'effetto ARCH prima di stimare il modello, il che comporta il risparmio di eventuali inutili procedure di stima. Sia  $f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha, \varepsilon)$  la funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ . Posto

$$L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha, \varepsilon) = \ln f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha, \varepsilon),$$

può essere interessante testare l'ipotesi  $H_0 : R\alpha - r = 0$ . Il test dei moltiplicatori di Lagrange è basato sulla distribuzione dello score quando  $H_0$  è vera. La statistica è

$$\xi^* = (\partial l / \partial \alpha) \Lambda_{\alpha\alpha}^{-1} (\partial l / \partial \alpha'). \quad (33)$$

La 33 è una forma quadratica dello score nella inversa della matrice di informazione entrambe valutate in  $H_0$ . Se  $H_0$  è vera,  $\xi^*$  ha distribuzione asintotica chi-quadro con un numero di gradi di libertà pari al numero delle restrizioni che impone su  $\alpha$ . Utilizzando i risultati del paragrafo precedente,

$$\xi_T^* = \frac{1}{2} f_o' \Omega_o^{-1} Z (Z' \Omega_o^{-1} Z)^{-1} Z' \Omega_o^{-1} f_o,$$

dove il deponente denota che  $f$  e  $\Omega$  sono calcolati usando i valori parametrici sotto  $H_0$ . Dal teorema 1.4.2 segue che una statistica asintoticamente equivalente è

$$\xi_T = 3T \frac{f_o' \Omega_o^{-1} Z (Z' \Omega_o^{-1} Z)^{-1} Z' \Omega_o^{-1} f_o}{f_o' \Omega_o^{-1} Z} = 3T R_o^2.$$

Le statistiche  $\xi_T^*$  e  $\xi_T$  sono entrambe calcolate mediante una regressione multivariata di  $f_o$  su  $Z$  nella metrica  $\Omega_o^{-1}$ . La statistica  $\xi_T$  è metà della somma dei quadrati stimati da questa regressione, mentre  $R_o^2$  è il coefficiente di determinazione non centrato.

<sup>18</sup> Per approfondimenti sul test dei moltiplicatori di Lagrange si veda Engle (1982b), Engle (1984), Breusch e Pagan (1980).

## Capitolo 2

# ESTENSIONI DEL PROCESSO ARCH LINEARE

### 2.1 Introduzione

Nel presente capitolo tratteremo le estensioni del processo ARCH bivariato lineare. Come sottolineato nel capitolo precedente il numero dei parametri da stimare per un ARCH( $p$ ) bivariato lineare è elevato anche quando  $p$  è uguale a 1. Sono state perciò proposte diverse parametrizzazioni della matrice delle varianze e covarianze condizionata con l'obbiettivo di ridurre il numero dei parametri da stimare e di semplificare la procedura di stima cercando di mantenere inalterata la natura autoregressiva della matrice delle varianze e covarianze condizionata. Nel paragrafo 2.2 parleremo del processo ARCH diagonale bivariato mentre nel paragrafo 2.3 introdurremo l'ARCH( $p$ ) modificato proposto entrambi da Engle e Kraft (1983). Il paragrafo 2.4 tratterà invece il processo ARCH a fattore latente proposto da Diebold e Nerlove (1989).



## 2.2 Processo ARCH Diagonale Lineare Bivariato

### 2.2.1 Caratteristiche del Processo

Il processo ARCH diagonale lineare è stato proposto da Engle e Kraft (1983). Il vantaggio principale di questo modello rispetto al caso lineare è di ridurre il numero dei parametri di due ordini di grandezza: da  $\frac{(n^2+n)}{2} + p(\frac{n^2+n}{2})^2$  a  $\frac{(n^2+n)}{2} + p(\frac{n^2+n}{2})$ , dove  $n$  è la dimensione e  $p$  l'ordine del processo ARCH. Ad esempio, la matrice delle varianze-covarianze condizionata di un processo ARCH(1) bivariato lineare dipende da 12 parametri mentre quella dell'ARCH(1) diagonale bivariato lineare da 6. Questo comporta semplificazioni nella procedura di stima e conseguente facilità nell'adattare il modello a situazioni reali [Attanasio e Edey (1988)].

Proponiamo ora la definizione dell'ARCH( $p$ ) diagonale lineare bivariato. Sia

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t), \quad (34)$$

$$H_{ij,t} = \alpha_{ij} + \sum_{k=1}^p \varepsilon_{t-k}' \Omega_{ij,k} \varepsilon_{t-k}, \quad i, j = 1, 2 \quad \forall t \in Z,$$

un processo ARCH( $p$ ) bivariato lineare. Estendendo la proposizione 1.3.4 del capitolo precedente al caso dei processi di ordine  $p$ :

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_0 + \sum_{k=1}^p A_k \eta_{t-k}.$$

Se  $A_k$  è una matrice diagonale per  $k = 1, 2, \dots, p$  allora il processo 34 è chiamato processo ARCH( $p$ ) diagonale bivariato lineare. Nel caso dell'ARCH(1) diagonale bivariato lineare la matrice delle varianze-covarianze vettorizzata mediante l'operatore  $\text{vech}$  risulta

$$h_t = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice delle varianze-covarianze condizionata nella notazione di Engle e Kraft (1983) risulta

$$H_t = \begin{pmatrix} a_{01} + a_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 & a_{02} + a_{22} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ a_{02} + a_{22} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} & a_{03} + a_{33} \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Le varianze condizionate dipendono soltanto dai valori passati elevati al quadrato mentre le covarianze condizionate dipendono soltanto dai prodotti incrociati dei rispettivi processi univariati. Come nel capitolo 1 esamineremo in dettaglio solo il caso ARCH(1) diagonale bivariato. Essendo questo un caso particolare del processo ARCH(1) bivariato lineare, sono ancora validi teoremi, corollari e proposizioni del capitolo 1 ad eccezione della proposizione 1.3.3. Inoltre nel caso del processo ARCH(1) diagonale è possibile trovare le condizioni necessarie e sufficienti sui parametri affinché la matrice delle varianze-covarianze condizionate sia definita positiva  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ . Queste condizioni sono enunciate nella seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.2.1** *Sia*

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_0 + \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33})\eta_{t-1}, \quad \forall t \in Z,$$

*un processo ARCH(1) diagonale bivariato lineare. Allora condizioni necessarie e sufficienti affinché*

$$H_t = \begin{pmatrix} a_{01} + a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2 & a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & a_{03} + a_{33}\varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

*sia definita positiva sono*

$$\begin{aligned} a_{01} &> 0, \\ a_{01}a_{03} - a_{02}^2 &> 0, \\ a_{11} &\geq 0, \\ a_{11}a_{33} - a_{22}^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

*Dimostrazione* (Non dimostrata in Engle e Kraft (1983)). La proposizione 1.3.1 afferma che

$$H_t = H_0 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{t-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Secondo il teorema 1.3.1  $H_t$  è definita positiva se e solo se

1.  $H_0$  è definita positiva

2.  $B = \lambda_1^2 \Omega_{11} + \lambda_2^2 \Omega_{22} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12}$  è semidefinita positiva, con  $\Omega_{ij}$   $i, j = 1, 2$  matrici simmetriche  $2 \times 2$  e  $\lambda_i$   $i = 1, 2$  scalare.

In questo caso dimostreremo solo che se  $H_0$  è definita positiva e  $B$  è semidefinita positiva allora  $H_t$  è definita positiva. Per la dimostrazione del contrario si rimanda al teorema 1.3.1. Dalla proposizione 1.3.4 si vede che se  $A_1$  è diagonale si ha  $\Omega_{11,11} \neq 0$ ,  $2\Omega_{12,12} \neq 0$ ,  $\Omega_{22,22} \neq 0$ ,  $2\Omega_{12,12} = 0$ ,  $\Omega_{11,22} = 0$ ,  $\Omega_{12,22} = 0$ ,  $\Omega_{12,11} = 0$ ,  $2\Omega_{22,12} = 0$ , quindi la matrice  $35$  delle varianze-covarianze condizionata del processo ARCH(1) diagonale si può scrivere in forma alternativa:

$$\begin{aligned} H_t &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \Omega_{11,11} \varepsilon_{1t-1}^2 & \alpha_{12} + 2\Omega_{12,12} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ \alpha_{12} + 2\Omega_{12,12} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} & \alpha_{22} + \Omega_{22,22} \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= H_0 + K, \end{aligned}$$

per cui  $B$  risulta

$$B = \lambda_1^2 \Omega_{11,11} + \lambda_2^2 \Omega_{22,22} + 4\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{12,12}$$

e quindi è uno scalare. Utilizzando la notazione di Engle e Kraft (1983)

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{02} & a_{03} \end{pmatrix} \\ &e \\ B &= \lambda_1^2 a_{11} + \lambda_2^2 a_{33} + 2\lambda_1 \lambda_2 a_{22} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$H_t$  è definita positiva quando

$$\begin{aligned} a_{01} &> 0 \\ a_{01} a_{03} - a_{02}^2 &> 0 \\ a_{11} &\geq 0 \\ a_{11} a_{33} - a_{22}^2 &\geq 0. \quad c.v.d. \end{aligned}$$

Atanasio (1988) ottiene le condizioni precedenti, in questo caso però sono solo sufficienti e non anche necessarie, scrivendo la matrice delle varianze-covarianze condizionata in modo alternativo. La matrice delle varianze-covarianze condizionata del

modello ARCH(1) diagonale bivariato può essere scritta

$$\begin{aligned}
 H_t &= \begin{pmatrix} a_{01} + a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2 & a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & a_{03} + a_{33}\varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{02} & a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 & \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta_0 + \Delta_1 \circ \varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}, \tag{36}
 \end{aligned}$$

dove  $\circ$  rappresenta il prodotto di Hadamard<sup>1</sup>,  $\Delta_0$  è tale<sup>2</sup> che  $a_0 = \text{vech}(\Delta_0)$  e  $\Delta_1$  è tale che  $A_1 = \text{diag}(\text{vec}(\Delta_1))$ . La seguente proposizione, contenuta in Attanasio (1988), propone le condizioni sufficienti affinché  $H_t$  sia definita positiva  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ .

**PROPOSIZIONE 2.2.2** *Sia*

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_0 + \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33})\eta_{t-1}, \quad \forall t \in Z,$$

un processo ARCH(1) diagonale bivariato lineare. In base alla 96 la matrice delle varianze-covarianze condizionata può essere scritta

$$H_t = \Delta_0 + \Delta_1 \circ \varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}.$$

Se  $\Delta_0$  è definita positiva e  $\Delta_1$  è semidefinita positiva allora  $H_t$  è semidefinita positiva  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ .

**Dimostrazione**<sup>3</sup>  $\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}$  è semidefinita positiva per definizione<sup>4</sup> e che il prodotto di

<sup>1</sup>Seguendo Magnus e Neudecker (1988) il prodotto di Hadamard tra le due matrici  $M \times N$   $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  è  $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ . Perciò il prodotto di Hadamard  $A \circ B$  è essa stessa una matrice  $M \times N$  dove l' $ij$ -esimo elemento è  $a_{ij}b_{ij}$ .

<sup>2</sup>Si ricordi che in base alla proposizione 1.3.4

$$\text{vech}(H_t) = h_t = a_0 + A_1\eta_{t-1},$$

dove  $a_0$  e  $\eta_{t-1}$  sono vettori  $3 \times 1$  e  $A_1$  matrice  $3 \times 3$ .

<sup>3</sup>La dimostrazione da Attanasio (1988).

<sup>4</sup>Seguendo Lang (1970) se  $A$  e  $B$  sono due scalari

$$(AB)^2 \leq (AA)(BB), \tag{37}$$

Hadamard tra due matrici semidefinite positive è una matrice semidefinita positiva<sup>5</sup>, se  $\Delta_0$  è definita positiva e se  $\Delta_1$  è semidefinita positiva allora  $H_t$  è definita positiva per  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ . Quindi se

$$\begin{aligned} a_{01} &> 0, \\ a_{01}a_{03} - a_{02}^2 &> 0, \\ a_{11} &\geq 0, \\ a_{11}a_{33} - a_{22}^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

allora  $H_t$  è definita positiva per  $\forall \varepsilon_{t-1} \in R^2$ . *c.v.d.*

da cui

$$(AA)(BB) - (AB)^2 \geq 0. \quad (38)$$

La 37 è la disuguaglianza di Schwartz. Posto  $A = \varepsilon_{1t-1}$  e  $B = \varepsilon_{2t-1}$  si osserva che il determinante della matrice  $\varepsilon_t \varepsilon'_{t-1}$  è la 38. Perciò essendo  $\varepsilon_{1t-1}^2 \geq 0$  la matrice  $\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}$  è semidefinita positiva per definizione.

<sup>5</sup>Proponiamo una dimostrazione della proposizione, adattata al caso in questione, che esprime il risultato sopracitato.

**PROPOSIZIONE 2.2.3** *Siano  $\Delta_1$  e  $\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}$  due matrici  $2 \times 2$  semidefinite positive allora  $\Delta_1 \circ \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}$  è una matrice semidefinita positiva.*

*Dimostrazione (Non dimostrata in Attanasio (1988)). Il prodotto di Hadamard tra  $\Delta_1$  e  $\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}$  è*

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 & \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} & \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 & a_{22} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ a_{22} \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} & a_{33} \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Condizioni necessarie e sufficienti perché la matrice  $M$  è definita positiva sono

$$\begin{aligned} a_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 &\geq 0 \\ e \\ a_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 a_{33} \varepsilon_{2t-1}^2 - a_{22}^2 (\varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Se  $\Delta_1$  e  $\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}$  sono semidefinite positive allora  $a_{11} \geq 0$  e quindi  $a_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 \geq 0$ , inoltre

$$\begin{aligned} a_{11} a_{33} - a_{22}^2 &\geq 0 \\ e \\ \varepsilon_{1t-1}^2 \varepsilon_{2t-1}^2 - (\varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1})^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

per cui il prodotto tra  $a_{11} a_{33}$  e  $\varepsilon_{1t-1}^2 \varepsilon_{2t-1}^2$  risulterà sempre maggiore o uguale al prodotto tra  $a_{22}^2$  e  $(\varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1})^2$ . *c.v.d.*

### 2.2.2 Stima del Processo ARCH Diagonale

I calcoli per stimare i parametri dell'ARCH(1) diagonale sono meno complessi di quelli per stimare un ARCH(1) bivariato lineare. In questo caso i parametri da stimare sono soltanto 6. Il vettore dei parametri è

$$\alpha = (a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{11}, a_{22}, a_{33}).$$

Posto

$$Z_t^* = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{1t-1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{22} \\ a_{03} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$h_t = Z_t^* \text{vec}(A').$$

In base al teorema 1.4.1 lo score e la matrice di informazioni sono

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha'} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T Z_t^* \Omega^{-1} f_t,$$

$$\Lambda_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} E \left[ \sum_{t=1}^T Z_t^* \Omega_t^{-1} Z_t^* \right],$$

con

$$\Omega^{-1} = P(H_t^{-1} \otimes H_t^{-1})P,$$

$$f_t = \text{Svech}(\varepsilon_t \varepsilon_t' - H_t) = (\eta_t - h_t).$$

Posto

$$H_t = \begin{pmatrix} a_{01} + a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2 & a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ a_{02} + a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & a_{03} + a_{33}\varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H_{11t} & H_{12t} \\ H_{12t} & H_{22t} \end{pmatrix},$$

si ricava

$$H_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{H_{22t}}{\delta} & -\frac{H_{12t}}{\delta} \\ -\frac{H_{12t}}{\delta} & \frac{H_{11t}}{\delta} \end{pmatrix},$$

dove  $\delta = H_{11t}H_{22t} - H_{12t}^2$ . Effettuando i calcoli si ottiene

$$\Omega_t^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{H_{22t}}{\delta}\right)^2 & -2\left(\frac{H_{22t}H_{12t}}{\delta^2}\right) & \left(\frac{H_{12t}}{\delta}\right)^2 \\ -2\left(\frac{H_{22t}H_{12t}}{\delta^2}\right) & 2\left[\left(\frac{H_{12t}}{\delta}\right) + \left(\frac{H_{22t}H_{11t}}{\delta^2}\right)\right] & -2\left(\frac{H_{22t}H_{11t}}{\delta^2}\right) \\ \left(\frac{H_{12t}}{\delta}\right)^2 & -2\left(\frac{H_{11t}H_{12t}}{\delta^2}\right) & \left(\frac{H_{11t}}{\delta}\right)^2 \end{pmatrix}$$

e

$$f_t = \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1t}^2 - a_{01} - a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2) \\ (\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t} - a_{02} - a_{22}\varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1}) \\ (\varepsilon_{1t}^2 - a_{01} - a_{11}\varepsilon_{1t-1}^2) \end{pmatrix}.$$

### 2.3 Processo ARCH(p) Modificato

Il processo ARCH(p) modificato è stato anche esso introdotto da Engle e Kraft (1983). Le specifiche dell'ARCH(p) modificato permettono di ridurre il numero dei parametri della matrice delle varianze-covarianze condizionata rispetto al caso lineare facendolo sempre dipendere da  $p$  valori passati del processo. La riduzione del numero dei parametri si ottiene facendo dipendere la matrice delle varianze-covarianze condizionata da variabili casuali somma che sono combinazioni lineari di  $p$  valori passati dei processi stocastici univariati.

Proponiamo ora la definizione del processo ARCH(p) modificato. Sia

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-p} \sim N(0, H_t),$$

un processo ARCH(p) bivariato. Se la matrice delle varianze-covarianze condizionata è

$$H_t = \begin{pmatrix} \alpha_{01} + \varepsilon_t^* \Omega_{11} \varepsilon_t^* & \alpha_{02} + \varepsilon_t^* \Omega_{12} \varepsilon_t^* \\ \alpha_{02} + \varepsilon_t^* \Omega_{12} \varepsilon_t^* & \alpha_{03} + \varepsilon_t^* \Omega_{22} \varepsilon_t^* \end{pmatrix},$$

dove  $\varepsilon_t^* = \sum_{j=1}^p \tau_j \varepsilon_{t-j}$  con  $\sum_{j=1}^p \tau_j = 1$ , allora il processo ARCH(p) bivariato può essere chiamato ARCH(p) modificato lineare<sup>6</sup>. Per tale processo la matrice delle

<sup>6</sup>Il sistema dei pesi è scelto a priori e può essere costante, crescente oppure decrescente. In ogni caso i pesi sono positivi. Ad esempio, i termini che compongono il sistema possono essere scelti in progressione aritmetica. Fissato  $p$  e l'ultimo termine il primo termine è  $a_1 = \frac{2}{p} - a_n$ , con  $p < 2a_n$ .

varianze-covarianze condizionata vettorizzata è

$$\begin{aligned}
 h_t &= a_o + A_1 \sum_{j=1}^P \tau_j \eta_{t-j} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^P \tau_j \varepsilon_{1t-j}^2 \\ \sum_{j=1}^P \tau_j \varepsilon_{1t-j} \varepsilon_{2t-j} \\ \sum_{j=1}^P \tau_j \varepsilon_{2t-j}^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Fissato  $n$  il numero dei parametri dell'ARCH( $p$ ) in questo caso è

$$\frac{(n^2 + n)}{2} + \frac{(n^2 + n)^2}{2},$$

e non dipende da  $p$ . Il numero dei parametri dell'ARCH( $p$ ) lineare è invece direttamente proporzionale al valore di  $p$ . Nel caso del modello bivariato il numero dei parametri si riduce da  $(3 + 9p)$ , con  $p > 1$ , a 12. Se  $A_1$  è diagonale da  $(3 + 3p)$ , con  $p > 1$ , a 6.

Una delle prime applicazioni dell'ARCH( $p$ ) modificato è contenuta in Engle, Granger e Kraft (1984). Gli autori, motivando la scelta per la forma semplice del modello e per la loro esperienza passata, hanno adattato un ARCH(8) modificato bivariato lineare con sistema di pesi costante<sup>7</sup> al processo stocastico bivariato costituito dagli errori di due modelli di previsione per l'inflazione USA.

## 2.4 Processo ARCH Bivariato con Fattore Latente

### 2.4.1 Caratteristiche del Processo

Una completa esposizione del processo ARCH multivariato con fattore latente è stata effettuata per la prima volta da Diebold e Nerlove (1989), mentre una trattazione

<sup>7</sup>In questo caso la varianza condizionata di  $\varepsilon_{1t}$ , ad esempio, dipende da

$$\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \varepsilon_{1t-j}^2.$$



sommatoria era già contenuta in Diebold (1986). L'obbiettivo principale di questa formulazione è di ridurre il numero dei parametri della matrice delle varianze-covarianze condizionata. In Diebold e Nerlove (1989) il modello è stato applicato ai tassi di cambio: il fattore latente rappresenta gli influssi non ben specificati che tendono a influenzare contemporaneamente tutti i tassi di cambio.

Sia

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \lambda F_t + e_t \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} F_t + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (39)$$

un processo stocastico bivariato con  $\lambda' = (\lambda_1 \quad \lambda_2)$  vettore dei parametri e  $F_t$  fattore latente. Posto

$$\begin{aligned}\Psi_{1,t-1} &= (e_{t-1}, e_{t-2}, \dots), \\ \Psi_{2,t-1} &= (F_{t-1}, F_{t-2}, \dots),\end{aligned}$$

in Diebold e Nerlove (1989) si suppone

$$F_t | \Psi_{2,t-1} \sim N(0, \sigma_t^2).$$

con

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2,$$

$$\begin{aligned}E[F_t | \Psi_{2,t-1}] &= 0 \quad \forall t \in Z, \\ \text{VAR}[F_t | \Psi_{2,t-1}] &= E[F_t^2 | \Psi_{2,t-1}] \\ &= \alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2 \\ &= \sigma_t^2 \quad \forall t \in Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{COV}[F_t, F_{t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{2,t'-1}] &= E[F_t, F_{t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{2,t'-1}] \\ &= 0 \quad \forall t \neq t' \in Z\end{aligned}$$

Inoltre

$$E[e_t | \Psi_{1,t-1}] = 0 \quad \forall t \in Z,$$

$$\begin{aligned}
E[e_t e_t' | \Psi_{1,t-1}] &= \begin{pmatrix} E[e_{1t}^2 | \Psi_{1,t-1}] & E[e_{1t} e_{2t} | \Psi_{1,t-1}] \\ E[e_{1t} e_{2t} | \Psi_{1,t-1}] & E[e_{2t}^2 | \Psi_{1,t-1}] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&= \Gamma \quad \forall t \in Z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[e_t e_{t'}' | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}] &= \begin{pmatrix} E[e_{1t} e_{1t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}] & E[e_{1t} e_{2t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}] \\ E[e_{1t} e_{2t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}] & E[e_{2t} e_{2t'} | \Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \quad \forall t \neq t' \in Z
\end{aligned}$$

e

$$E[e_t F_{t'}] = 0 \quad \forall t, t' \in Z.$$

Se sono soddisfatte le ipotesi precedenti il processo 39 è chiamato ARCH(p) a fattore latente. Posto  $\Psi_{t-1} = (\Psi_{1,t-1}, \Psi_{2,t-1})$ , si ricava

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon_t | \Psi_{t-1}] &= E[\lambda F_t + e_t | \Psi_{t-1}] \\
&= \lambda E[F_t | \Psi_{t-1}] + E[e_t | \Psi_{t-1}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La matrice delle varianze-covarianze condizionata è quindi

$$\begin{aligned}
H_t &= E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] \\
&= E[(\lambda F_t + e_t)(\lambda' F_t + e_t') | \Psi_{t-1}] \\
&= E[\lambda \lambda' F_t^2 + \lambda F_t e_t' + e_t \lambda' F_t + e_t e_t' | \Psi_{t-1}] \\
&= \lambda \lambda' E[F_t^2 | \Psi_{t-1}] + \lambda E[F_t e_t' | \Psi_{t-1}] + \\
&\quad E[e_t F_t | \Psi_{t-1}] \lambda' + E[e_t e_t' | \Psi_{t-1}] \\
&= \lambda \lambda' \sigma_t^2 + \Gamma \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 (\alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2) + \gamma_1 & \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2) \\ \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2) & \lambda_2^2 (\alpha_0 + \theta \sum_{i=1}^p (p+1-i) F_{t-i}^2) + \gamma_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La motivazione intuitiva di tale modello può essere molto forte [Diebold e Nerlove (1989)]. Ad esempio: se applicato ai tassi di cambio<sup>8</sup>, il fattore comune  $F$  rappresenta, come precedentemente accennato, gli influssi non ben specificati che tendono a influenzare tutti i tassi di cambio. L'impatto del fattore comune sul tasso di cambio  $j$  si riflette nel valore di  $\lambda_j$ , mentre gli  $e_j$  rappresentano le influenze specifiche di ciascun paese. Tutte le funzioni che rappresentano le varianze e covarianze condizionate dipendono dai valori del fattore comune  $F$ , tuttavia i parametri dai quali dipendono queste funzioni sono differenti<sup>9</sup>. Rispetto ad un ARCH(p) bivariato lineare il numero dei parametri dai quali dipende la matrice delle varianze-covarianze condizionate<sup>10</sup> si riduce da 12 a 6.

### 2.4.2 Stima del Processo ARCH Bivariato con Fattore Latente

La procedura di stima proposta in Diebold e Nerlove (1989) è la seguente

#### 1. Stima preliminare a due stadi dei parametri.

<sup>8</sup>Diebold e Nerlove (1989) applicarono un modello ARCH a fattore latente ai valori *spot* nominali di 7 tassi di cambio.

<sup>9</sup>Ad esempio nel caso bivariato da noi trattato  $E[e_{1t}e_{1t'}|\Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}]$  dipende da  $\lambda_1, \gamma_1, \alpha_0$ , e  $\theta$ ,  $E[e_{2t}e_{2t'}|\Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}]$  dipende da  $\lambda_2, \gamma_2, \theta$  e  $\alpha_0$  mentre  $E[e_{1t}e_{2t'}|\Psi_{1,t-1}, \Psi_{1,t'-1}]$  dipende da  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_0$ , e  $\theta$ .

<sup>10</sup>Supponendo invece che

$$F|\Psi_{2,t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

con

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2,$$

si ha un GARCH bivariato con fattore latente, naturale estensione del corrispondente processo ARCH. Questo tipo di modello, a nostra conoscenza, non è stato ancora utilizzato.

Ponendo la varianza<sup>11</sup> non condizionata di  $F$  uguale a 1 la matrice delle varianze-covarianze non condizionata<sup>12</sup> fattorizzata è

$$\begin{aligned} H &= E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] \\ &= \lambda \lambda' E[F_t^2] + \lambda E[F_t \varepsilon_t'] + \\ &\quad E[\varepsilon_t F_t] \lambda' + E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] \\ &= \lambda \lambda' + \Gamma. \end{aligned} \tag{40}$$

Avvalendosi della *factor analysis* si ottengono dapprima le stime di  $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2$  e  $\{F_t\}$ . Il secondo passo consiste nel testare gli effetti ARCH per la serie temporale  $\{\hat{F}_t\}$  e quindi stimare  $\alpha$  e  $\theta$ .

2. **Stima simultanea dei parametri.** Utilizzando le stime della fase precedente come valori iniziali si ottengono le stime congiunte dei parametri basate sui filtri di Kalman. Per informazioni più dettagliate sulla procedura di stima vedere Diebold e Nerlove (1989). L'identificazione dei modelli ARCH multivariati a fattore latente è discussa da Sentana (1988), ma la presenza di una variabile latente nella matrice delle varianze e covarianze condizionata rende le procedure inferenziali esatte estremamente complicate.

<sup>11</sup>Si ricordi che la varianza non condizionata di  $F$  è  $E[F^2]$  essendo  $E[F] = 0$ .

<sup>12</sup>La 40 segue ricordando che, ad esempio,

$$\begin{aligned} E[F_t \varepsilon_t'] &= E[E[F_t \varepsilon_t' | \Psi_{t-1}]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

## Capitolo 3

# PROCESSI GARCH BIVARIATI

### 3.1 Introduzione

Il presente capitolo è dedicato ai processi GARCH multivariati, introdotti per la prima volta da Bollerslev, Engle e Woolridge (1988). Nel paragrafo 3.2 tratteremo brevemente l'estensione dall'ARCH al GARCH nel contesto univariato. Nel paragrafo 3.3 il processo GARCH lineare bivariato mentre nel paragrafo 3.4 il processo GARCH BEKK. Il paragrafo 3.5 sarà invece dedicato al processo GARCH bivariato a correlazioni costanti.

### 3.2 Processo GARCH(p,q) Univariato

La parametrizzazione utilizzata da Engle (1982a) per modellare i momenti secondi non osservabili fa dipendere la varianza condizionata dagli elementi dell'insieme delle informazioni secondo una struttura autoregressiva.

Posto  $\Psi_{t-1}$  l'insieme delle informazioni al tempo  $t - 1$  e  $h_t$  funzione misurabile rispetto a  $\Psi_{t-1}$ , il processo ARCH univariato è

$$\varepsilon_t \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (41)$$

con

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2. \quad (42)$$

Come si è visto nel paragrafo 1.1 il processo costituito dalla 41 e la 42 è chiamato ARCH di ordine  $p$ , o ARCH( $p$ ). Bollerslev (1986) ha generalizzato il processo ARCH introducendo nella varianza condizionata corrente anche i valori passati della stessa varianza condizionata. In tal caso

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_q h_{t-q} \\ &= \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) h_t, \end{aligned} \quad (43)$$

con  $\alpha(L)$  e  $\beta(L)$  operatori, rispettivamente, di ordine  $p$  e  $q$ . Il processo composto dalla 41 e dalla 43 è chiamato ARCH di ordine  $(p,q)$ , o GARCH( $p,q$ ). La sigla GARCH significa Generalized Auto Regressive Conditional Heteroschedasticity. Caratteristica distintiva del GARCH( $p,q$ ) concerne la dipendenza da  $\varepsilon_t^2$ . Riordinando i termini infatti la 43 può essere interpretata come un modello ARMA in  $\varepsilon_t^2$ , con parametri autoregressivi  $\alpha(L) + \beta(L)$  e parametri a media mobile  $-\beta(L)$ ; il processo incorrelato delle innovazioni è invece costituito da  $(\varepsilon_t^2 - h_t^2)$ . Il processo GARCH( $p,q$ ) rappresenta quindi, per il processo ARCH( $p$ ), ciò che il processo ARMA( $p,q$ ) rappresenta per l'AR( $p$ ). Il semplice GARCH(1,1) solitamente fornisce una descrizione parsimoniosa dei dati, vedi ad esempio Bollerslev (1986) o McCurdy e Morgan (1988).

### 3.3 Processo GARCH( $p,q$ ) Lineare Bivariato

Sia  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  un processo stocastico bivariato continuo a parametro discreto. Se  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  permette la rappresentazione

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t,$$

$$Z_t \text{ i.i.d.}, E[Z_t] = 0, VAR[Z_t] = I, \forall t \in Z,$$

con  $H_t$  dipendente da  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$  e  $H_{t-1}, H_{t-2}, \dots, H_{t-q}$ , allora  $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$  è chiamato processo GARCH( $p,q$ ) bivariato.  $H_t$  è supposta definita positiva, dipendente dal tempo e tale che i suoi elementi sono funzioni misurabili di  $\Psi_{t-1}$ , l'insieme delle informazioni al tempo  $t-1$ . Si parla di GARCH bivariato lineare quando ciascun elemento di  $H_t$  è uguale alla somma di una costante, una forma

quadratica in  $\varepsilon_{t-1}$  e un termine dipendente da

$$vech(H_{t-1}) = \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}.$$

Posto

$$\begin{aligned} h_t &= vec(H_t) \\ \eta_t &= vec(\varepsilon_t \varepsilon_t'), \end{aligned}$$

la matrice delle varianze-covarianze condizionata può essere scritta

$$h_t = C_0 + A_1 \eta_{t-1} + \dots + A_p \eta_{t-p} + G_1 h_{t-1} + \dots + G_q h_{t-q}, \quad (44)$$

dove  $C_0$  è un vettore  $4 \times 1$  di parametri e le  $A_i$  e  $G_i$  sono  $4 \times 4$  matrici di parametri. In notazione matriciale, la 44 diventa

$$\begin{aligned} h_t &= \left( C_0 : A_1 : \dots : A_p : G_1 : \dots : G_q \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{t-1} \\ \vdots \\ h_{t-q} \end{pmatrix} \\ &= F z_t \\ &= (I \otimes z_t) vec(F') \\ &= Z_t \alpha, \end{aligned} \quad (45)$$

dove

$$\begin{aligned} F &= \left( C_0 : A_1 : \dots : A_p : G_1 : \dots : G_q \right), \\ z_t' &= (1, \eta_{t-1}', \dots, \eta_{t-q}', h_{t-1}', \dots, h_{t-p}'), \\ Z_t &= (I \otimes z_t), \\ \alpha &= vec(F'). \end{aligned}$$

Ad esempio la matrice delle varianze-covarianze condizionata nel caso del processo GARCH(1,1) bivariato lineare è

$$h_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Notare che è stata omessa l'equazione per  $h_{21,t}$  e non abbiamo dato alcun coefficiente a  $\varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1}$  e  $h_{21,t-1}$  essendo questi ridondanti. La 45 definisce una parametrizzazione chiamata da Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989) *Parametrizzazione Vettoriale*<sup>1</sup> della matrice delle varianze-covarianze condizionata<sup>2</sup>.

Anche in questo caso, ai fini pratici è desiderabile restringere il numero dei parametri da stimare. Analogamente a quanto visto nel paragrafo 2.1 per gli ARCH una naturale restrizione, utilizzata per la prima volta da Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988), è la *Parametrizzazione Diagonale* della matrice delle varianze-covarianze condizionata, in cui le matrici  $A_1$  e  $G_1$  sono assunte diagonali. La matrice delle varianze-covarianze condizionata risulta:

$$\begin{aligned}
h_t &= \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{23} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>La parametrizzazione 45 è un caso particolare di quella presentata da Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989). Posto  $x_t$  vettore  $J \times 1$  di variabili esogene deboli come in Engle, Hendry e Richard (1983) la matrice delle varianze-covarianze condizionata diventa  $h_t = C_0 + C_1 \tilde{x}_t + A_1 \eta_{t-1} + \dots + A_q \eta_{t-q} + G_1 h_{t-1} + \dots + G_p \eta_{t-p}$  dove  $C_1$  è una matrice  $4 \times J$  matrice di parametri e  $\tilde{x}_t = \text{vec}(x_t x_t')$ .

<sup>2</sup>La matrice delle varianze-covarianze condizionata nell'esempio precedente dipende da 21 parametri.



e dipende quindi da 9 parametri soltanto:  $h_{11,t}$  e  $h_{22,t}$  dipendono rispettivamente  $\varepsilon_{1,t-1}^2$  e  $\varepsilon_{2,t-1}^2$ , mentre  $h_{12,t-1}$  dipende da  $\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1}$ .

### 3.4 Processo GARCH BEKK

Affinché una parametrizzazione della matrice delle varianze-condizionata sia efficace si richiede che  $H_t$  sia definita positiva per tutti i valori di  $\varepsilon_t$ . Nella *Parametrizzazione Vettoriale* e anche nella *Parametrizzazione Diagonale* questa restrizione è difficile da imporre. Per ovviare in parte a questo problema Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989) hanno proposto una parametrizzazione alternativa della matrice delle varianze-covarianze condizionata conosciuta come *Parametrizzazione BEKK*.

Per il caso bivariato la matrice delle varianze-covarianze condizionata<sup>3</sup> è

$$H_t = C_0^* C_0^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A_{ik}^* \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_{ik}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p G_{ik}^* H_{t-i} G_{ik}^*,$$

dove  $C_0^*$ ,  $A_{ik}^*$ , e  $G_{ik}^*$  sono matrici  $2 \times 2$  di parametri con  $C_0^*$  matrice simmetrica. Il limite  $K$  della sommatoria determina la generalità del processo. La parametrizzazione BEKK è sufficientemente generale da includere tutte le *Parametrizzazioni Diagonali* definite positive e quasi tutte le *Parametrizzazioni Vettoriali* definite positive e consente alla matrice delle varianze-covarianze condizionata di essere definita positiva sotto condizioni deboli.

Per semplicità e per ragioni di spazio nel resto del paragrafo faremo riferimento ad un GARCH(1,1) bivariato, con  $K = 1$ . La matrice delle varianze-covarianze condizionata in tal caso è:

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^* + G_{11}^* H_{t-1} G_{11}^*.$$

<sup>3</sup>In Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989) la *Parametrizzazione BEKK* include anche le variabili esogene. La matrice delle varianze-covarianze in questo caso risulta:

$$H_t = C_0^* C_0^* + \sum_{k=1}^K C_{1k}^* x_t x_t' C_{1k}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p A_{ik}^* \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_{ik}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q G_{ik}^* H_{t-i} G_{ik}^*.$$

Il termine  $\sum_{k=1}^K C_{1k}^* x_t x_t' C_{1k}^*$  rappresenta le influenze esogene.

$$\begin{aligned}
 &= C_0^* C_0^* + \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 & \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} & \varepsilon_{2t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{pmatrix}' H_{t-1} \begin{pmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

La matrice delle varianze-covarianze condizionata dipende da 11 parametri. La relazione matematica tra i parametri della *Parametrizzazione Vettoriale* e quelli della *Parametrizzazione BEKK* è espressa nella proposizione 3.4.1 tratta da Baba, Engle, Kraft and Kroner (1989).

**PROPOSIZIONE 3.4.1** Sia

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t,$$

$$Z_t \text{ i.i.d. }, E[Z_t] = 0, \text{VAR}[Z_t] = I, \forall t \in Z,$$

un processo *GARCH(1,1)* bivariato.

Siano

$$h_t = C_0 + A_1 \eta_{t-1} + G_1 h_{t-1} \quad (46)$$

e

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^* + G_{11}^* H_{t-1} G_{11}^*, \quad (47)$$

rispettivamente la *Parametrizzazione Vettoriale* e la *Parametrizzazione BEKK*. Le due parametrizzazioni sono equivalenti se e solo se esistono  $C_0^*$ ,  $A_1^*$ , e  $G_1^*$  tali che:

$$C_0 = (C_0^* \otimes C_0^*)' \text{vec}(I_2), \quad (48)$$

$$A_1 = (A_1^* \otimes A_1^*)', \quad (49)$$

$$G_1 = (G_1^* \otimes G_1^*)'. \quad (50)$$

Dimostrazione<sup>4</sup>. Applicando l'operatore<sup>5</sup>  $\text{vec}$  all'equazione 47 si ottiene:

$$\begin{aligned} h_t &= \text{vec}(C_0^* C_0^*) + \text{vec}(A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*) + \text{vec}(G_{11}^* H_{t-1} G_{11}^*) \\ &= \text{vec}(C_0^* C_0^*) + (A_{11}^* \otimes A_{11}^*)' \text{vec}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') + (G_{11}^* \otimes G_{11}^*)' \text{vec}(H_{t-1}) \\ &= (C_0^* \otimes C_0^*)' \text{vec}(I_2) + (A_{11}^* \otimes A_{11}^*)' \eta_{t-1} + (G_{11}^* \otimes G_{11}^*)' h_{t-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Se valgono la 48, la 49 e la 50 allora la 51 diventa

$$h_t = C_0 + A_1 \eta_{t-1} + G_1 h_{t-1},$$

che è la 46, e ciò prova la sufficienza.

La necessarietà si dimostra osservando che la 46 e la 51 devono valere per tutti i valori di  $\varepsilon_{t-1}$ :  $A_1$  può quindi essere eguagliata a  $(A_1^* \otimes A_1^*)'$ . Ad esempio ponendo  $\varepsilon_{t-1}' = (1, 0)$  si stabilisce una eguaglianza tra la prima colonna di  $A_1$  e la prima colonna  $(A_1^* \otimes A_1^*)'$ .

La necessarietà della 48 e della 50 si dimostra in maniera similare<sup>6</sup> c.v.d.

Come già accennato, la caratteristica distintiva della *Parametrizzazione BEKK* è che le matrici delle varianze-covarianze definite positive sono essenzialmente generate da parametrizzazioni non ristrette. La proposizione 3.4.2 fornisce una condizione sufficiente affinché  $H_t$  sia definita positiva per ogni  $\varepsilon_{t-1}$  appartenente ad  $R^2$ .

<sup>4</sup>La dimostrazione è tratta da Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989).

<sup>5</sup>Si ricordi che Dhrymes (1984)

$$\begin{aligned} \text{vec}(A_1 A_2 A_3) &= (I \otimes A_1 A_2) \text{vec}(A_3) \\ &= (A_3' \otimes A_1) \text{vec}(A_2) \\ &= (A_3' A_2' \otimes I) \text{vec}(A_1), \end{aligned}$$

dove  $A_1, A_2, A_3$  sono matrici di appropriate dimensioni.

<sup>6</sup>Una implicazione della proposizione 3.4.1 è che ogni processo GARCH con *Parametrizzazione Vettoriale* implicato da un qualsiasi processo GARCH con *Parametrizzazione BEKK* è unico, mentre il contrario non è vero. La trasformazione da un processo GARCH con *Parametrizzazione Vettoriale* ad uno con *Parametrizzazione BEKK* non è unica perché fissato  $A_1$  la scelta di  $A_1^*$  non è unica. Questo può essere visto notando che  $(A_1^* \otimes A_1^*) = (-A_1^* \otimes -A_1^*)$ , così mentre  $A_1 = (A_1^* \otimes A_1^*)$  è unica, la scelta di  $A_1^*$  non è unica.

**PROPOSIZIONE 3.4.2** *Se  $H_0$  è definita positiva allora la parametrizzazione 47 rende  $H_t$  definita positiva per tutti i possibili valori di  $\varepsilon_t$  se lo spazio nullo<sup>7</sup> di  $C_0^*$  e di  $G_{11}$  si intersecano soltanto all'origine.<sup>8</sup>*

Per la dimostrazione si veda Baba, Engle, Kraft e Kroner (1989).

### 3.5 Processo GARCH Bivariato a Correlazioni Costanti

#### 3.5.1 Caratteristiche del Processo

Sia

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t), \quad (52)$$

un processo GARCH(p,q) bivariato. Posto  $H_{ijt}$  il generico elemento di  $H_t$ , la matrice delle varianze-covarianze condizionata è

$$H_t = \begin{pmatrix} H_{11t} & H_{12t} \\ H_{12t} & H_{22t} \end{pmatrix}.$$

Supponendo [Bollerslev (1990)]

$$\rho_{12} = \frac{H_{12t}}{(H_{11t}H_{22t})^{1/2}}, \quad (53)$$

dove  $\rho_{12}$  è il coefficiente di correlazione tra  $\varepsilon_{1t} | \Psi_{t-1}$  e  $\varepsilon_{2t} | \Psi_{t-1}$ , il processo 52 è chiamato GARCH(p,q) bivariato a correlazioni costanti. Dalla 53 si ricava

$$H_{12t} = \rho_{12}(H_{11t}H_{22t})^{1/2}. \quad (54)$$

Con l'ipotesi 53 si suppone quindi che il coefficiente di correlazione condizionato sia costante, cioè che il rapporto tra la covarianza condizionata e la radice quadrata del

<sup>7</sup>La spazio nullo di una matrice A è l'insieme dei vettori-soluzione dell'equazione matriciale  $AX = 0$ .

<sup>8</sup>Notare che una condizione sufficiente affinché il criterio dello spazio nullo sia valido è che sia  $C_0^*$  che  $G_{11}$  abbiano rango n.

prodotto delle varianze condizionate sia indipendente dal tempo, mentre in generale  $\rho$  varia al variare di  $H_t$ . L'ipotesi 53, testata con successo in numerose applicazioni pratiche utilizzando modelli GARCH<sup>9</sup> e (Vedi Cecchetti, Cumby e Fligleski (1988), Kroner e Claessens (1990), Kroner e Lastrapes (1991), Baillie e Bollerslev (1990), Schwert e Seguin (1990)), ha il vantaggio di semplificare notevolmente la procedura di stima e di inferenza del modello 52. La validità dell'ipotesi resta però una questione empirica che va preventivamente verificata [Bollerslev (1990)].

Supponendo inoltre che

$$\begin{aligned} H_{11t} &= \text{VAR}[\varepsilon_{1t}|\Psi_{t-1}] = \alpha_{01} + \sum_{k=1}^p \alpha_{1k} \varepsilon_{1t-k}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_{1k} H_{11,t-k} \\ e \\ H_{22t} &= \text{VAR}[\varepsilon_{2t}|\Psi_{t-1}] = \alpha_{02} + \sum_{k=1}^p \alpha_{2k} \varepsilon_{2t-k}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_{2k} H_{22,t-k}, \end{aligned}$$

il processo 52 è chiamato GARCH(p,q) lineare bivariato a correlazioni costanti. In tal caso dalla 54 si ottiene

$$H_{12t} = \rho_{12} \left[ \left( \alpha_{01} + \sum_{k=1}^p \alpha_{1k} \varepsilon_{1t-k}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_{1k} H_{11,t-k} \right) \left( \alpha_{02} + \sum_{k=1}^p \alpha_{2k} \varepsilon_{2t-k}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_{2k} H_{22,t-k} \right) \right]^{1/2}.$$

La proposizione seguente, per semplicità di calcolo e motivi di spazio sarà dimostrata soltanto per il GARCH(1,1) lineare bivariato a correlazioni costanti. In questo caso

$$\begin{aligned} H_{11t} &= \alpha_{01} + \alpha_{11} \varepsilon_{1t-1}^2 + \beta_1 H_{11t} \\ e \\ H_{22t} &= \alpha_{02} + \alpha_{21} \varepsilon_{2t-1}^2 + \beta_2 H_{22t}. \end{aligned}$$

Si vuole dimostrare che assumendo l'ipotesi di correlazione condizionata costante la matrice delle varianze-covarianze condizionata può essere fattorizzata nel prodotto di 3 matrici, una delle quali è indipendente dal tempo.

**PROPOSIZIONE 3.5.1** *Sia*

$$\varepsilon_t|\Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

<sup>9</sup>L'ipotesi è stata testata anche per modelli ARCH [Cecchetti, Cumby e Fliglewski (1988)].

un processo GARCH(1,1) a correlazioni costanti, allora  $H_t$  può essere scritta

$$H_t = D_t \Gamma D_t,$$

dove  $D_t$  è una matrice diagonale  $2 \times 2$  e  $\Gamma$  è una matrice  $2 \times 2$  invariante nel tempo con generico elemento  $\varrho_{ij}$   $i = j = 1, 2$ .

Dimostrazione (Non dimostrata in Bollerslev (1990)). Posto

$$H_{11t} = \sigma_{1t}^2 = (\alpha_{01} + \alpha_1 \varepsilon_{1t-1}^2 + \beta_1 H_{11,t-1})$$

e

$$H_{22t} = \sigma_{2t}^2 = (\alpha_{02} + \alpha_2 \varepsilon_{2t-1}^2 + \beta_2 H_{22,t-1}),$$

la matrice<sup>10</sup> delle varianze e covarianze condizionata è

$$H_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1t} \sigma_{1t} & \varrho_{12} \sigma_{1t} \sigma_{2t} \\ \varrho_{12} \sigma_{1t} \sigma_{2t} & \sigma_{2t} \sigma_{2t} \end{pmatrix}$$

<sup>10</sup>Proponiamo la seguente proposizione che definisce le condizioni sufficienti affinché la matrice delle varianze-covarianze condizionata sia definita positiva per un processo ARCH(1) a correlazioni costanti. La proposizione è sicuramente valida per un processo ARCH(1) a correlazioni costanti tuttavia l'estensione ai processi ARCH di ordine superiore e ai processi GARCH a correlazioni costanti resta da verificare.

**PROPOSIZIONE 3.5.2** Sia

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

un processo ARCH(1) bivariato a correlazioni costanti. In questo caso

$$H_t = \begin{pmatrix} H_{11t} & H_{12t} \\ H_{12t} & H_{22t} \end{pmatrix}$$

dove

$$H_{11t} = \alpha_{01} + \alpha_1 \varepsilon_{1t-1}^2$$

e

$$H_{22t} = \alpha_{02} + \alpha_2 \varepsilon_{2t-1}^2.$$

$H_t$  è definita positiva se

1.  $\alpha_{01} > 0, \alpha_{02} > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$
2.  $1 - \varrho_{12}^2 > 0$

Dimostrazione (Non dimostrata in Bollerslev (1990)). La proposizione 3.5.1 afferma che  $H_t = D_t \Gamma D_t$ . Seguendo Anderson (1958),  $H_t$  è definita positiva se  $\det(D_t)$  è diverso da zero e se  $\Gamma$  è definita positiva. Se  $\alpha_{01} > 0, \alpha_{02} > 0, \alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$  allora  $\det(D_t) > 0 \forall t \in Z$ . Se  $1 - \varrho_{12}^2 > 0$  allora  $\Gamma$  è definita positiva. c.v.d.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & \rho_{12}\sigma_{2t} \\ \rho_{12}\sigma_{1t} & \sigma_{2t} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2t} \end{pmatrix} \\
 &= D_t \Gamma D_t. \text{ c.v.d.}
 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Stima del Processo GARCH a Correlazioni Costanti

Sia

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} Z_t$$

$$Z_t \sim N(0, I), \quad Z_t \text{ i. i. d.},$$

un processo GARCH bivariato. Si è visto nel capitolo precedente che la funzione di verosimiglianza di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$  è

$$L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) = -T \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |H_t|. \quad (55)$$

Assumendo le proprietà standard [Serfling (1980)] della funzione di verosimiglianza la stima di verosimiglianza di  $\alpha$  è asintoticamente normale. Tuttavia poiché la funzione 55 richiede l'inversione di una matrice 2x2 per ogni istante di tempo, la procedura di massimizzazione può essere difficoltosa anche per moderate dimensioni di T. Assumendo l'ipotesi di correlazioni costanti la 55 diventa

$$\begin{aligned}
 L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\alpha; \varepsilon) &= -T \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |D_t \Gamma D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' (D_t \Gamma D_t)^{-1} \varepsilon_t \\
 &= -T \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |D_t| |\Gamma| |D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' (D_t \Gamma D_t)^{-1} \varepsilon_t \\
 &= -T \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\Gamma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |D_t| + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' (D_t \Gamma D_t)^{-1} \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -T \ln(2\pi) - \sum_{t=1}^T \ln|D_t| - \frac{T}{2} \ln|\Gamma| + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_t' \Gamma^{-1} \tilde{\varepsilon}_t,
 \end{aligned} \tag{56}$$

dove gli  $\tilde{\varepsilon}_t = D_t^{-1} \varepsilon_t$  sono residui standardizzati. La funzione<sup>11</sup> 56 è sempre non lineare nei parametri e come la funzione 55 richiede una procedura iterativa di massimizzazione<sup>12</sup>. Tuttavia, se paragonata alla funzione 55, invece di  $T$  inversioni di matrice  $2 \times 2$  richiede solo una inversione di matrice  $2 \times 2$ . Inoltre la stima di massima verosimiglianza di  $\Gamma$  per il corrispondente SUR<sup>13</sup> con campione  $\tilde{\varepsilon}_t$   $t = 1, 2, \dots, T$  è data da  $\hat{\Gamma} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_t \tilde{\varepsilon}_t'$  che è definita positiva per costruzione. Perciò per il principio di invarianza della stima di massima verosimiglianza la stima di  $\varrho_{12}$  è

$$\hat{\varrho}_{12} = \frac{\sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_{1t} \tilde{\varepsilon}_{2t}}{\left( \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_{1t}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_{2t}^2 \right)^{1/2}}$$

e il parametro in  $\Gamma$  può essere concentrato fuori della funzione di verosimiglianza semplificando i calcoli ulteriormente:

$$L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T}(\theta; \varepsilon) = -T(1 + \ln(2\pi) - \ln(T)) - \sum_{t=1}^T \ln|D_t| - \frac{T}{2} \ln \left| \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_t \tilde{\varepsilon}_t' \right|.$$

Tuttavia la matrice di informazione non è diagonale a blocchi tra i parametri in  $D_t$  e  $\Gamma$ , così per ottenere le stime asintotiche della matrice delle varianze-covarianze attraverso le tecniche standard, è necessario derivare la funzione 56. Il metodo di ottimizzazione prescelto in Bollerslev (1990) è l'algoritmo contenuto in Berndt, Hall, Hall e Hausman (1974) con l'aggiunta delle derivate numeriche del primo ordine. L'algoritmo ha il

<sup>11</sup>Notare che  $\sum_{t=1}^T \ln|D_t| = \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_{1t}) + \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_{2t})$ .

<sup>12</sup>Togliendo il termine  $-\frac{T}{2} \ln|\Gamma|$  la 56 è il logaritmo della funzione di verosimiglianza del campione  $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_T$  con  $\tilde{\varepsilon}_t \sim N(0, \Gamma)$ .

<sup>13</sup>Il modello SUR (Seemingly Unrelated Regression) e il modello GARCH sono collegati dalle corrispettive funzioni di verosimiglianza. Infatti la funzione di verosimiglianza del SUR per un campione  $(\varepsilon_t)_{t=1,2,\dots,T}$  è ricavabile dalla funzione di verosimiglianza del GARCH per un campione  $(\varepsilon_t)_{t=1,2,\dots,T}$  con  $\tilde{\varepsilon}_t = D_t^{-1} \varepsilon_t$ . Quindi parte dei parametri della funzione di verosimiglianza del GARCH possono essere stimati con stimatori del SUR. Per informazioni generali sul SUR si veda Judge, Griffiths, Hill, Lutkepohl e Lee (1980) capitolo 11. Per informazioni sul SUR con disturbi eteroschedastici si consulti Srivastava e Giles (1987) capitolo 8.



vantaggio rispetto al metodo di ottimizzazione dello score di assicurare la convergenza ad un punto di massimo locale del logaritmo della funzione di verosimiglianza.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup>Per maggiori informazioni sul metodo BHHH si consulti Berndt, Hall, Hall e Hausman (1974).

## Capitolo 4

# MERCATI FUTURES

### 4.1 Introduzione

Nel presente capitolo<sup>1</sup> tratteremo i mercati *futures* in quanto costituiscono i mercati oggetto dell'analisi empirica che verrà sviluppata nel capitolo successivo.

Le due funzioni sociali dei mercati *futures* [Kolb (1991)] sono:

- Previsione del prezzo *cash*
- *Hedging*.

**Previsione del Prezzo.** I mercati *futures* possono essere utilizzati per trarre informazioni sul prezzo *cash* futuro di un determinato bene o strumento finanziario. Utilizzando i prezzi *futures* attuali gli operatori possono formulare previsioni sul prezzo di un dato bene ad una certa data nel futuro. La prima funzione sociale dei mercati *futures* è quindi quella di aiutare gli operatori dei vari mercati a formulare stime migliori dei prezzi futuri, in modo da ottimizzare le decisioni di consumo e investimento.

**Hedging.** Si veda paragrafo 4.7.

Particolare attenzione verrà devoluta al London International Financial Futures Exchange (LIFFE) e al Mercato Italiano *Futures* (MIF) dai quali trarremo le quotazioni che verranno utilizzate nell'applicazione. Il paragrafo 4.2 contiene una esposizione

---

<sup>1</sup>L'elenco delle abbreviazioni contenute nel presente capitolo è riportato nel paragrafo 4.8.

generale sui mercati *futures*. Nel paragrafo 4.3 tratteremo il LIFFE mentre nel paragrafo 4.4 il Mercato Telematico dei Titoli di Stato (MTS) che costituisce la base per il funzionamento del Mercato Italiano *Futures* (MIF), messo a fuoco nel paragrafo 4.5. Il paragrafo 4.6 analizza le caratteristiche dei prezzi *futures* mentre il paragrafo 4.7 è dedicato all'*hedging*. I modelli ARCH e GARCH bivariati si sono infatti rilevati molto utili a testare l'*hedging* dinamico [vedi Cecchetti, Cumby e Figlewski (1988) e Baillie e Myers (1989)], l'aspetto dei mercati *futures* che approfondiremo nell'analisi empirica.

## 4.2 Contratti Futures

### 4.2.1 Nozioni Generali e Cenni Storici

Un contratto *futures*, come precedentemente accennato, può essere definito come un accordo di acquisto o vendita di una quantità standard di un particolare strumento finanziario<sup>2</sup> secondo condizioni prefissate al momento della stipula del contratto stesso, riguardanti prezzo, quantità, qualità e luogo di consegna.

I *futures* sono molto più diffusi di quanto non si creda: ogni volta che acquistiamo un bene non immediatamente disponibile, dilazionandone il pagamento sino alla consegna, implicitamente stiamo operando a termine. Ci stiamo infatti impegnando ad accettare la consegna del bene ad una certa data e a pagarne un prezzo prestabilito. Entrambe le transazioni avverranno in una data futura e non sorge quindi alcun rapporto di credito tra le parti.

---

<sup>2</sup>Lo strumento finanziario oggetto dei *financial futures* può essere rappresentato da:

- Valute estere
- Monete e metalli preziosi
- Tassi di interesse
- Titoli (ad esempio titoli di stato, certificati di deposito e obbligazioni)
- Indici di Borsa.

L'origine dei *financial futures* si fa di norma risalire al 1973, con l'apertura del Chicago Board Options Exchange (CBOE), a cui hanno fatto seguito le aperture di altri simili mercati, come ad esempio il LIFFE.

In passato le operazioni a termine avevano esclusivamente ad oggetto prodotti agricoli tradizionali (detti *commodities*) quali grano, soia, zucchero, caffè, cotone, cacao. La nascita del primo mercato a consegna differita di prodotti agricoli risale all'Ottobre del 1865 presso il Chicago Board of Trade (CBT). A questo, fece seguito il Cotton Exchange di New York (NYCE) e, due anni più tardi, il New York Mercantile Exchange (NYMEX). Quanto al contesto Europeo<sup>3</sup> si devono ricordare, anche se relative ad un periodo successivo, soprattutto le esperienze del London Metal Exchange (LME) e del London Commodity Exchange (LCE), così come i mercati organizzati per la negoziazione dello zucchero e dei prodotti industriali di Parigi e Amsterdam.

Successivamente, come logica evoluzione dei mercati a termine delle *commodities*, sono stati i mercati per la negoziazione a termine di strumenti finanziari che si sono affermati in modo rilevante dopo la crisi economica-finanziaria che ha caratterizzato il decennio degli anni '70. Altro motivo che ha spinto gli operatori a ricercare tecniche, strumenti ed operazioni che permettessero di affrontare e gestire con maggior flessibilità il rischio è stata la forte oscillazione dei prezzi ed il passaggio dal regime dei cambi fissi a quello dei cambi flessibili.

Così nel 1972 nell'ambito dell'International Monetary Market (IMM) del Chicago Mercantile Exchange venne istituito un mercato ufficiale per la negoziazione dei

---

<sup>3</sup>I mercati *futures* esistono in vari paesi fuori dagli Stati Uniti sino dalla metà del ventesimo secolo, tuttavia la maggior parte delle contrattazioni in *futures* si svolge negli Stati Uniti. La prevalenza dell'industria statunitense dei *futures* è dovuta essenzialmente a tre fattori [Fink e Feduniak (1988)]:

1. Rischio
2. Organizzazione dei mercati *futures*
3. Aziende di *broker*.

**Rischio.** È universalmente riconosciuto che gli Stati Uniti è il paese più sicuro nel quale detenere capitali. Questa caratteristica scaturisce da una combinazione di stabilità politica, potenza militare e volontà di mantenere un libero mercato.

**Organizzazione dei mercati *futures*.** L'organizzazione dei mercati *futures* è molto complessa. È necessario molto personale specializzato come, ad esempio, *brokers* capaci di eseguire gli ordini in modo competente, specialisti in comunicazioni capaci di tenere i telefoni in funzione, amministratori che hanno la competenza di sviluppare le regole dei mercati. Gli Stati Uniti, ed in particolare i mercati *futures* in Chicago e New York, dispongono delle migliori organizzazioni e del migliore personale specializzato del mondo.

**Aziende di Broker.** Un mercato per funzionare attivamente necessita di domanda. Le maggiori aziende di *broker* come, ad esempio, la Merrill Lynch, gli Shearsons, la E. F. Huttons sono aziende Statunitensi.

contratti *futures* sulle principali valute (dollaro, sterlina, marco, yen, ecc.).

Fu questa la prima di una lunga serie di innovazioni in campo finanziario che avrebbero portato ben presto al consolidamento di un mercato *futures* non circoscritto solo alle valute, ma in grado di abbracciare i titoli obbligazionari, a breve e a lungo termine, e gli indici di titoli azionari.

Nel 1975, infatti, presso il Chicago Board of Trade si registrò la prima negoziazione di contratti *futures* sui tassi di interesse, i Government National Mortgage Association *futures*. Dopo qualche mese il Chicago Mercantile Exchange (CME) stabilì le modalità per la trattazione di un altro contratto *futures* in grado di facilitarne la gestione dell'esposizione ai tassi d'interesse, grazie ai contratti standardizzati sui *Treasury Bonds*, sulle *Treasury Notes*, sulle *Commercial Papers* a 90 giorni, sui *Certificates of deposits* emessi dalle banche ed infine sui depositi in Eurodollari. Per il primo contratto *futures* su indici azionari che permettesse di gestire il rischio sistematico relativo ad un titolo o ad un portafoglio di titoli, si deve invece attendere il Febbraio 1982 quando il Kansas City Board of Trade (KCBT) iniziò a quotare il *futures* sull'indice di Borsa collegato all'indice Value Line. Stessa logica venne seguita dal Chicago Mercantile Exchange e dal New York Futures Exchange (NYFE). Risulta quindi facile comprendere come i contratti *futures* finanziari negli USA si sono sviluppati a macchia d'olio in quanto considerati utili per la gestione del rischio di flessione delle quotazioni.

Basti ricordare che attualmente tali mercati attualmente sono presenti in quasi tutti i paesi industrializzati e che nelle borse più sviluppate una gamma ampiamente diversificata di contratti permette di gestire le diverse configurazioni di rischio e di approfittare delle asimmetrie del mercato per assumere posizioni speculative o per effettuare interessanti arbitraggi<sup>4</sup>.

In Europa il paese con maggior numero di mercati *futures* è la Gran Bretagna.

---

<sup>4</sup>Per arbitraggio si intende acquisto (o vendita) di uno strumento finanziario e contemporanea vendita (o acquisto) in funzione uguale ma contraria di uno strumento correlato, per trarre profitto dal disallineamento dei prezzi. Esempio: acquisto di titoli di Stato a lungo termine e contemporanea vendita di *futures* sugli stessi titoli. L'arbitraggio viene considerato senza rischio o con rischio minimo. L'arbitraggista non è uno speculatore, in quanto non si espone all'andamento futuro del mercato con una posizione aperta: infatti apre e contemporaneamente chiude una posizione con profitto immediato.

All'inizio del 1977 la Gran Bretagna aveva 15 organizzazioni che potevano essere qualificate come mercati *futures*; tra di essi ve ne sono due particolarmente attivi: il già citato London International Futures Exchange (LIFFE) e il London Metal Exchange (LME). Al LME, fondato nel 1977, sono trattati contratti *futures* in rame, nickel, argento, zinco, stagno e piombo. Il LIFFE, fondato nel 1982 in risposta alla crescita dei *financial futures* negli Stati Uniti, è il solo mercato *futures* nel mondo interamente dedito ai *financial futures*. Al LIFFE sono quotati anche gli *Italian Government Bonds*: le quotazioni sono disponibili alla seconda pagina di Finanza & Mercati del Sole 24 ore.

Per quanto riguarda l'Italia nel Settembre 1992 è stato istituito il MIF, dove vengono quotati i *futures* sui Buoni Poliennali del Tesoro (BTP *futures*).

#### 4.2.2 Caratteristiche dei Contratti Futures

Un contratto *futures*, come precedentemente accennato, rappresenta un accordo di acquisto o vendita di una quantità standard di un particolare strumento finanziario, ad esempio, per consegna futura prestabilita, ad un prezzo concordato dalle parti in una borsa organizzata. È, pertanto, un contratto simmetrico che impegna all'esecuzione sia il venditore che il compratore.

Un *futures* si differenzia dai contratti a termine per l'essere oggetto di contrattazione su mercati organizzati e centralizzati, anziché essere scambiato bilateralmente attraverso il contatto diretto degli operatori come appunto accadde per i contratti a termine. Altra differenza consiste nel fatto che i contratti a termine vengono stipulati direttamente tra le controparti mentre con i *futures* si ha la stipula tra controparte e stanza di compensazione<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Organo responsabile per la liquidazione e compensazione degli ordini di compravendita presso una Borsa a termine. Nel caso dei *futures*, la Stanza di compensazione o *Clearing House* si pone come controparte per ogni transazione effettuata, al fine di garantire buon esito. È definita *the seller's buyer and the buyer's seller*: è l'acquirente per il venditore e il venditore per l'acquirente. La *Clearing House* tratta esclusivamente con i suoi membri (*clearing member*), e può essere un ente autonomo oppure una società controllata dalla Borsa a termine.

È opportuno sintetizzare qui quelle caratteristiche dei mercati *futures* che ne rendono peculiare il funzionamento o che possono influenzare il meccanismo di determinazione del prezzo di equilibrio di un *futures* rispetto al prezzo a pronti:

- I mercati *futures* sono mercati centralizzati: le contrattazioni si svolgono presso specifiche borse specializzate e regolamentate generalmente attraverso il meccanismo delle grida intorno alle *corbeilles* (come vedremo esiste il caso in cui i *futures* vengono trattati anche attraverso il circuito telematico).
- I contratti sono fortemente standardizzati: si trattano i beni e le attività finanziarie per consegna in periodi fissi e specifici secondo qualità e luoghi di consegna predeterminati. Anche il prezzo viene determinato secondo incrementi minimi standard che prendono il nome di *ticks* (che corrispondono generalmente allo 0,01 del contratto<sup>6</sup>).
- L'intero mercato viene regolato nel suo funzionamento da una *clearing-house* che, come precedentemente accennato in nota, si pone come controparte sia dei venditori che in nota dei compratori stipulando due contratti separati e garantendo, quindi, l'assolvimento delle obbligazioni assunte. I contratti non sono bilaterali (come per i contratti a termine) il che facilita la chiusura delle posizioni.

Il funzionamento della *clearing-house* è concepito in modo tale che ogni giorno si ha l'addebito o l'accredito, da parte della stessa, della perdita o del profitto registrati in quel giorno. Infatti le posizioni in essere vengono valutate in base ai prezzi di mercato ed il profitto e la perdita del giorno vengono pagati variando il deposito integrativo.

È infatti raro che un contratto si risolva effettivamente con la consegna del bene: solitamente si ricorre alla chiusura della posizione e quindi alla liquidazione del differenziale della variazione della quotazione.

---

<sup>6</sup>Ad esempio al LIFFE il valore del *tick* è di Lit. 20000 mentre al MIF è di Lit. 25000.

### 4.2.3 Tipologie di Contratti Futures

Secondo Kolb (1991) i contratti *futures* trattati cadono in una delle 4 seguenti categorie distinte in base al bene sottostante:

1. Contratti su beni fisici
2. Contratti su valute straniere
3. Contratti su titoli a reddito fisso
4. Contratti su indici.

**Contratti su Beni Agricoli e Metallurgici.** Nell'area agricola sono trattati numerosi contratti, ad esempio, contratti su mais, avena, grano, semi di soia, bestiame, prodotti forestali, cotone, caffè e succo di arancia. Per molti di questi beni sono disponibili contratti con diversi mesi di consegna. Il numero di contratti disponibile per ciascun bene dipende inoltre dal livello di attività di quel bene. Per alcuni contratti *futures* inattivi ci possono essere uno o due mesi di consegna nell'anno. Mentre contratti attivi, come ad esempio quelli sui semi di soia, possono avere 8 mesi di consegna all'anno. I contratti metallurgici riguardano sia metalli grezzi sia derivati del petrolio beni con la caratteristica comune di poter essere facilmente negoziabili. È per questo motivo che sono trattati in modo simile. Tra i metalli sono trattati, ad esempio, oro, argento e platino, mentre tra i derivati del petrolio propano e gasolio.

**Contratti su Titoli a Reddito Fisso.** Questa tipologia di contratti riguarda buoni del tesoro, certificati di credito del tesoro e depositi in eurodollari.

**Contratti su Valute Estere.** I contratti *futures* sulle valute estere iniziarono ad essere contrattati nel 1970. Questi contratti riguardano, ad esempio, Sterlina Inglese, Dollaro Canadese, Yen Japponese e Marco Tedesco.

Il mercato *futures* sulle valute estere rappresenta il solo caso di mercato *futures* contrapposto ad un mercato *forward* efficiente. Quest'ultimo è molto più esteso del corrispondente mercato *futures*.

**Contratti su Indici.** La maggior parte dei contratti *futures* su indici concerne indici



di borsa. La trattazione di questi contratti è iniziata nel 1982. Negli Stati Uniti<sup>7</sup> gli indici oggetto dei contratti *futures* sono:

- Standard and Poor's 500
- Major Market Index
- New York Stock Exchange Index
- Value Line Index.

Una caratteristica peculiare di questi contratti è quella di non ammettere possibilità di consegna. L'obbligazione dell'operatore deve essere conclusa o tramite *reversing trade*<sup>8</sup> oppure tramite saldo a contanti.

#### 4.2.4 Differenze tra Contratti Futures e Forward

In questo paragrafo chiariremo le caratteristiche di un contratto *forward* e le principali differenze tra questo e un contratto *futures*.

<sup>7</sup>A Tokio e al Singapore International Monetary Exchange è quotato il *futures* sul Japanese Nikkei Index.

<sup>8</sup>Esistono tre modi per chiudere un contratto *futures* [Kolb (1991)]:

1. Consegna del bene sottostante oppure saldo a contanti
2. Operazione inversa (*reversing trade*)
3. Transazione *exchange-for-physicals*, conosciuta anche come transazione *ex pit* perché ha luogo fuori dal *pit* (recinto delle grida).

I contratti *futures* sono stipulati per essere completati con la consegna del bene sottostante. La consegna ha luogo in un certo luogo ad un certo periodo di tempo stabiliti nel contratto secondo le regole del mercato *futures*. Recentemente i mercati *futures* hanno introdotto la chiusura per saldo a contanti. Anziché effettuare la consegna del bene gli operatori pagano alla data di scadenza del contratto per saldare profitti e perdite. Sia la consegna che il saldo a contanti chiudono il contratto alla data di scadenza dello stesso. Statisticamente solo pochi contratti *futures* sono chiusi tramite consegna o per saldo a contanti.

Per completare il contratto *futures* tramite *reversing trade* l'operatore vende o acquista il contratto nel mercato *futures* per portare la sua posizione a zero.

Un'altro metodo per completare il contratto *futures* è l'*exchange-for-physicals*. Con questo tipo di operazione l'operatore A che detiene un contratto *futures* su un certo bene e sullo stesso ha una *long position* (parte acquirente di un contratto *futures*) si accorda con l'operatore B che detiene un contratto *futures* sullo stesso bene e ha una *short position* (parte venditrice di un contratto *futures*).

I contratti *forward* vengono essenzialmente negoziati su di un mercato *over the counter* vale a dire un mercato non regolamentato e con forti *spread*<sup>9</sup> nelle quotazioni.

Un detentore di un titolo obbligazionario dalla vita residua di otto anni che sappia di doverlo alienare fra un anno e che non voglia incorrere nel rischio di variazioni impreviste dei tassi di interesse può stipulare un contratto che stabilisca fin da ora il prezzo e la quantità con cui avverrà la cessione del titolo in un determinato momento, evitando così il deprezzamento che il titolo potrebbe subire nel caso di un aumento dei saggi di interesse. Se però durante l'anno il comportamento dei saggi di interesse mostrasse un andamento diverso da quello atteso inizialmente, e cioè iniziassero a scendere, e il detentore volesse beneficiare del prevedibile aumento di prezzo dell'obbligazione, egli dovrebbe stipulare un altro contratto *forward* che preveda, questa volta, l'acquisto dei titoli. Ma data la difficoltà di reperire un contraente disposto a cedere proprio quella quantità per quella data, probabilmente il detentore subirà una perdita pari alla differenza tra il prezzo di mercato del titolo e quello di cessione previsto dal contratto *forward*. Proprio gli ostacoli che si incontrano nell'abbandonare la posizione assunta al mutare delle aspettative hanno spinto a standardizzare questi contratti in modo da renderli alienabili con una certa facilità prima della scadenza.

Esaminiamo allora in dettaglio quali sono le principali differenze tra un contratto *forward* e un contratto *futures*:

- **Luogo di contrattazione.** I mercati *forward* sono mercati *over the counter* mentre i mercati *futures* sono mercati organizzati.
- **Termini del contratto.** Nei mercati *forward* sono stabiliti bilateralmente mentre nei mercati *futures* sono standardizzati.
- **Chiusura del contratto.** Un contratto *forward* è chiuso solo alla scadenza mentre un contratto *futures* può essere chiuso o alla scadenza oppure tramite un'operazione di segno opposto.
- **Informativa del mercato.** Nei mercati *forward* è generalmente non ufficiale mentre nei mercati *futures* è disponibile tramite l'osservazione delle quotazioni

---

<sup>9</sup>Differenziale tra due prezzi, o due valori, o due tassi.

e delle statistiche ufficiali.

- **Rischio di controparte.** Nei mercati *forward* è presente nella negoziazione mentre nei mercati *futures* è inesistente grazie all'interposizione della *clearing house*.
- **Depositi.** Nei mercati *forward* normalmente non c'è bisogno di alcun deposito mentre per poter operare nei mercati *futures* bisogna versare sia i margini iniziali<sup>10</sup>, sia quelli di variazione<sup>11</sup>.

### 4.3 Il London International Financial Futures Exchange (LIFFE)

Il London International Financial Futures Exchange (LIFFE) ha iniziato ad operare nel Settembre 1982 presso il Royal Exchange Building nella città di Londra e solo ultimamente si è trasferito, per le proprie contrattazioni, a Cannon Bridge. Gli utilizzatori attivi sono i suoi membri e la loro clientela.

L'istituzione sovrintende lo svolgimento delle contrattazioni ed organizza la raccolta e la diffusione delle informazioni. Gli operatori si incontrano nel *pit*<sup>12</sup>, dove si stipulano i contratti negoziando il prezzo.

La struttura del mercato *futures* Londinese è quella di un mercato continuo che utilizza un sistema di contrattazione alle grida. Gli ordini possono essere generati direttamente da membri del mercato che negoziano per proprio conto oppure da clienti che comunicano i propri ordini tramite un membro. Il BTP *futures* è sostenuto dai membri internazionali del LIFFE ed in particolare da undici brokers designati. Le transazioni vengono trasmesse dai partecipanti al *floor*<sup>13</sup> della borsa e da qui

---

<sup>10</sup> Deposito di garanzia versato presso la stanza di compensazione. È calcolato come percentuale prefissata rispetto al valore nominale del contratto acquistato o venduto.

<sup>11</sup> Rappresenta il profitto o la perdita di un operatore che ha una posizione aperta (cioè quando un operatore acquista o vende un *futures*). La cassa presso la quale l'operatore ha aperto il conto liquida giornalmente la sua posizione sul margine di variazione in base all'andamento del contratto da lui acquistato o venduto.

<sup>12</sup> Recinto di una Borsa alle grida.

<sup>13</sup> Luogo fornito dalla Borsa ai membri per incontrarsi ed eseguire gli ordini.

passano poi al recinto delle grida, dove l'ordine viene effettivamente eseguito mediante libera chiamata. Verificato che l'ordine eseguito corrisponda ai dettagli forniti dal venditore e dall'acquirente, lo staff della LIFFE trasmette questi dati alla stanza di compensazione.

La stanza di compensazione del LIFFE è la London Clearing House (LCH). La LCH è di proprietà delle sei maggiori *clearing banks* Britanniche. La LCH gestisce un sistema di compensazione elettronico, che registra i dettagli di tutte le transazioni in esso inserite. Soltanto i membri del LIFFE che aderiscono alla stanza di compensazione hanno diritto di compensare le proprie negoziazioni direttamente presso la LCH e di usufruire delle strutture offerte dal sistema di compensazione. I partecipanti che aderiscono alla stanza di compensazione si dividono in individui *clearing members* e *general members*: questi ultimi sono autorizzati a compensare sia le proprie transazioni che le operazioni negoziate da altri membri mentre i primi sono autorizzati a compensare solo le proprie. I membri che non partecipano al sistema di compensazione (non *clearing members*) sono tenuti a compensare le proprie transazioni, senza alcuna eccezione, tramite un *general clearing member*. Per poter aderire alla stanza di compensazione è necessario soddisfare alcune condizioni poste dal LIFFE e dalla stanza di compensazione stessa, fra cui la disponibilità di un minimo patrimoniale.

Ciascun membro può effettuare transazioni per proprio conto, oppure, nel caso di membro intermediario (*public order member*), gli è anche consentito operare per conto della clientela. In questo modo la partecipazione al LIFFE viene estesa anche ai non membri.

Caratteristica essenziale del processo di compensazione è la registrazione di ogni contratto confermato da parte della LCH il giorno successivo alla data di esecuzione dell'ordine. Al momento della conferma la garanzia della stanza di compensazione diventa effettiva.

Il LIFFE tratta quotidianamente tre tipi diversi di contratti su strumenti finanziari Italiani:

1. BTP *Futures*
2. *Futures* sull'euro lira a tre mesi

### 3. Opzioni<sup>14</sup> sui BTP futures.

Le caratteristiche del BTP futures negoziato al LIFFE a partire dal Settembre 1991 sono:

1. **Denominazione.** La denominazione Inglese è *Italian Government Bond* mentre quella Italiana è *BTP futures*.
2. **Unità di contrattazione.** L'acquisto di un BTP futures al LIFFE corrisponde all'acquisto di Lire 200 milioni di valore nominale di un BTP avente, al giorno della consegna dello stesso, una vita residua come specificata al punto 8.
3. **Misura del Tick.** Il cosiddetto *tick* misura il movimento minimo che il contratto può avere nel mercato. Nel nostro caso il movimento minimo è allo 0.01% del valore nominale del contratto futures. Poiché il contratto prevede la negoziazione di una quantità standard di Lit. 200 milioni di valore nominale ne consegue che la variazione di un *tick* corrisponde a Lit. 20000. La quotazione del contratto avviene per Lit. 100 di valore nominale.
4. **Cedola del contratto.** Il titolo nozionale prevede una cedola del 12%.
5. **Giorno di consegna.** Alla scadenza del contratto, in ogni mese di consegna, colui che possiede una posizione aperta 'corta' (il venditore) è obbligato a consegnare BTP a colui che possiede una posizione aperta 'lunga' (il compratore). Al momento della consegna spetta al venditore la scelta di quale BTP consegnare tra quelli indicati nella lista dei BTP consegnabili (due settimane prima dell'ultimo giorno di contrattazione di ogni mese di consegna il LIFFE pubblica la lista definitiva dei BTP consegnabili, con i relativi fattori di conversione e gli interessi netti maturati). Il giorno di consegna corrisponde al decimo giorno del mese di consegna (se questo giorno non è un giorno lavorativo per la Stanza di Compensazione Titoli in Italia, il giorno di consegna sarà il successivo giorno

<sup>14</sup>L'opzione è una convenzione posta in essere sull'accordo dei due contraenti con cui uno solo di essi (il promittente) è obbligato a stipulare il contratto, mentre l'altro (il promissario), che non è obbligato, ha il diritto di esigere che si giunga alla stipulazione del contratto con preferenza su ogni altra persona.

lavorativo per la Stanza di Compensazione Titoli in Italia ed è in quella data che bisognerà 'fisicamente' consegnare tali titoli).

Il venditore deve usare la Stanza di Compensazione Titoli per la consegna dei BTP. È importante sottolineare che, al fine di garantire un meccanismo di consegna affidabile per i contratti *futures*, tutte le consegne devono passare attraverso la London Clearing House (LCH).

6. **Ultimo giorno di contrattazione.** Corrisponde all'ultimo giorno lavorativo 'utile' per poter negoziare i contratti con regolamento nel mese di liquidazione in corso ed esso corrisponde alle 12,30 ora italiana di quattro giorni lavorativi prima del giorno di consegna.
7. **Orario di contrattazione.** Il contratto può essere negoziato ininterrottamente dalle ore 9,00 alle ore 17,05 Italiana.
8. **Titoli consegnabili.** Il giorno di consegna può essere consegnato, come abbiamo sopra specificato, un titolo BTP qualsiasi scelto dal venditore purché tale titolo abbia una vita residua compresa tra gli 8 e i 10,5 anni al decimo giorno del mese di consegna ed abbia un ammontare minimo emesso di almeno 4000 miliardi di Lire.
9. **Mesi di consegna.** Corrispondono ai mesi di liquidazione ovvero di chiusura delle contrattazioni. Mesi di consegna sono: Marzo, Giugno, Settembre, Dicembre.
10. **Margine iniziale.** A garanzia delle operazioni intraprese, oltre alla presenza delle Clearing House, di cui si è già accennato, vengono predisposti ulteriori sistemi di copertura, consistenti nell'azione concomitante dell'*initial margin* e del *variation margin*.

L'*initial margin* o margine iniziale è un vero e proprio deposito iniziale che l'operatore deve effettuare in funzione del tipo di contratto stipulato e del valore nominale dei titoli trattati. Questo deposito fornisce una protezione all'esposizione finanziaria della LCH qualora il contratto non venisse onorato.

Questa esposizione deriva dal fatto che poiché la stanza di compensazione potrebbe essere costretta a liquidare il contratto di un membro al prezzo corrente di mercato essa potrebbe subire una perdita imputabile alle variazioni di prezzo registrate nei giorni di negoziazione.

Il versamento del deposito iniziale ha lo scopo di proteggere la stanza di compensazione da questo tipo di esposizione nel periodo di tempo compreso tra la mancata ottemperanza al mercato e la data di liquidazione dei contratti da parte della stanza di compensazione.

I depositi iniziali richiesti debbono essere versati dai membri per l'intero periodo in cui le posizioni restano aperte. Perciò per promuovere la liquidità del mercato e per rendere meno onerosa l'operazione, i depositi iniziali vengono mantenuti al più basso livello possibile, pur assicurando un'adeguata protezione alla stanza di compensazione. Nel contratto BTP futures trattato al LIFFE il margine iniziale è pari al 3% del valore nominale del contratto.

11. **Margine di variazione.** Il margine di variazione o *variation margin* costituisce la risultante del continuo adeguamento del deposito iniziale a seguito dei guadagni o delle perdite registrate al termine di ogni giornata lavorativa e causate dalle fluttuazioni dei prezzi.

L'importo giornaliero da versare o da incassare (in base all'andamento della quotazione del contratto) verrà così determinato:

$$i = nvc,$$

dove:

i = Importo giornaliero da versare o incassare

n = Numero di *ticks* di variazione rispetto al giorno precedente

v = Valore di un *tick*

c = Numero dei contratti acquistati.

12. **Prezzo di chiusura.** Il prezzo preso come riferimento per calcolare l'importo della fattura da pagare e per determinare la quantità dei titoli BTP da consegnare è chiamato *Exchange Delivery Settlement Price* (EDSP). Al mercato

del LIFFE è il prezzo rilevato alle ore 12,30 (ora Italiana) dell'ultimo giorno di contrattazione.

13. **Fattore di conversione.** Il sistema del fattore di conversione (o *price factor*) è il meccanismo che permette di porre sulla medesima base i BTP consegnabili dotati di cedole e scadenze diverse.

Il fattore di conversione è il prezzo per 1 Lira nominale al quale il BTP offrirebbe un rendimento lordo del 12%.

Formula del fattore di conversione per il contratto BTP *futures* del LIFFE:

$$P(12) = \frac{(1,06^{\frac{x}{182,5}})^{-1} \left[ \frac{C}{2} + \frac{C}{0,12} \left[ 1 - \frac{1}{1,06^m} \right] + \frac{100}{1,06^m} \right] - c \left[ \frac{1}{2} - y + \frac{1}{360} \right]}{100},$$

dove:

- C = Cedola annua (ad esempio se la cedola è pari al 12,50%, allora C = 12,50)
- x = Numero di giorni dalla data di consegna (inclusa) al successivo giorno di pagamento degli interessi (escluso), calcolato secondo l'anno solare
- y = Frazione d'anno dal giorno di consegna (incluso) al successivo giorno di pagamento degli interessi (escluso). La frazione è calcolata sulla base di 30 giorni/mese e 360 giorni/anno
- m = Numero di semestri rimanenti dal prossimo pagamento degli interessi al giorno di scadenza finale.

Il fattore di conversione si basa su una cedola nozionale lorda del 12%, calcolata semestralmente in regime di capitalizzazione composta. Si basa sulla vita residua del titolo dal giorno di consegna (incluso).

14. **Importo della fattura.** Costituisce l'importo che un acquirente paga per i BTP a lui consegnati in base al prezzo di chiusura e viene così determinato:

$$I_f = [(E)(P)(2.000.000)] + R_{nm},$$



dove:

$I_f$  = Importo fattura

$E$  = *Exchange Delivery Settlement Price*

$P$  = Fattore di conversione

$R_{nm}$  = Rateo Netto Maturato.

La somma di LIT. 2000000 alla quale si fa riferimento nella formula sopra riportata rappresenta il valore nominale di un punto (100 *ticks*) del contratto *futures*.

#### 4.4 Il Mercato Telematico dei Titoli Di Stato (MTS)

Al fine di aumentare la liquidabilità dei titoli di Stato, su iniziativa della Banca d'Italia e del Tesoro, il 16 Maggio 1988 è nato il cosiddetto mercato telematico dei titoli di Stato.

In questo mercato all'ingrosso, contrapposto al mercato al dettaglio delle Borse Valori, 27 operatori principali quotano ogni giorno, sul circuito SIA<sup>15</sup>, denaro e lettera su 90 titoli di Stato, per ammontari fissi di 5 miliardi di lire o multipli (3 milioni di ECU<sup>16</sup> per i CTE<sup>17</sup>). Questo mercato utilizza il medesimo calendario lavorativo della Borsa Valori di Milano.

Al mercato telematico possono accedere due categorie di operatori finanziari: i *primary dealers* e i *dealers*. Ogni giorno lavorativo dalle 9,30 alle 13,30 e dalle 14,30 alle 16,30 ogni *primary dealer* ha l'obbligo di quotare almeno 5 titoli su una rosa di 90 titoli di Stato scelti per il loro rilievo segnaletico e non può rimanere chiuso per

<sup>15</sup>La sigla SIA è l'abbreviazione di Società Interbancaria per l'Automazione. La SIA fu costituita nel 1977 con l'obiettivo di fornire supporto operativo ai progetti di automazione del sistema bancario. La Banca d'Italia e l'ABI detengono entrambe una quota del 40 per cento del capitale sociale. Il 15 per cento è ripartito tra gli istituti centrali di categoria e le aziende di credito. Il 5 per cento è di proprietà della STET.

<sup>16</sup>Unità monetaria Europea di tipo paniere composta di quantità fisse, modificabili ogni 5 anni, delle valute comunitarie.

<sup>17</sup>I CTE sono certificati di credito del tesoro in ECU. Alla categoria dei certificati di credito del Tesoro appartengono inoltre i certificati del Tesoro a tasso variabile (CCT), reali (CTR), a sconto (CTS), con opzione (CTO) e altri certificati a tasso fisso.

più di 15 minuti, se collegato. La rosa dei titoli quotati viene periodicamente aggiornata al fine di inserire eventuali nuove emissioni dotate di eventuali caratteristiche *benchmark*<sup>18</sup>.

Al 31/7/1992 sono quotati 90 titoli così suddivisi: 10 BOT, 39 CCT, 28 BTP, 12 CTO, 1 CTE.

Possono aderire in qualità di *primary dealers* gli operatori che abbiano i seguenti requisiti:

- Patrimonio netto superiore a 50 miliardi di lire.
- Avvenuta stipulazione, nell'anno precedente quello in cui si chiede l'ammissione, di contratti di vendita di titoli di Stato e garantiti dallo stato per un valore complessivo non inferiore a 10,000 miliardi di lire.
- Possesso dei requisiti di onorabilità e professionalità da parte del *top management*.

I *dealers* possono dialogare con i *primary* collegandoli sulle loro pagine. Possono aderire in qualità di *dealers*: la Banca d'Italia, le aziende di credito, le società di intermediazione mobiliare, le società commissionarie di borsa (fino al 31/12/1992), le società finanziarie, le compagnie di assicurazione, le società di gestione dei fondi comuni. Questi soggetti devono avere un patrimonio netto di almeno 10 miliardi di lire ed aver stipulato, nell'anno precedente quello in cui si chiede l'ammissione, contratti di vendita di titoli di Stato e garantiti dallo stato per un valore complessivo non inferiore a 1,250 miliardi di lire. Al 31/7/1992 il numero dei *dealers* ammontava a 334.

La trasparenza di questo mercato è garantita:

- Da un comitato di controllo e da un comitato di sorveglianza, che vigilano sul comportamento dei *primary dealers*.
- Dalla continua supervisione dalla Banca d'Italia. Tutte le operazioni svolte sul circuito telematico sono infatti controllate da Banca d'Italia, la quale valuta

<sup>18</sup>Titolo guida a largo flottante (quantità di azioni di una società effettivamente negoziabili in borsa) e oggetto di ampie negoziazioni.

la conformità del prezzo rispetto alle applicazioni e rispetto alla posizione del *primary* (aperto o chiuso).

Il mercato telematico è attualmente operativo sul circuito SIA, tuttavia numerose pagine sul circuito *Reuter*<sup>19</sup> sono dedicate a questo servizio:

- Le pagine riassuntive per titolo.
- Le pagine *best*, sulle quali vengono riportati i migliori tre denari e lettere sui titoli trattati.
- Le pagine della Banca d'Italia, nelle quali a fine giornata sono riportati i dati riassuntivi sulle contrattazioni svolte sul mercato.
- Le pagine del comitato di gestione, nelle quali sono riportate le informazioni sui titoli quotati, i *primary dealers*, i comunicati di servizio per gli aderenti.

I prezzi trattati sul mercato telematico si intendono secchi, quindi quando viene effettuata una transazione, al prezzo deve essere aggiunto il rateo netto di interesse maturato fino al giorno di regolamento della transazione. L'unica eccezione è costituita dai BOT per i quali il prezzo fornito è già comprensivo delle ritenute. Per tutti i titoli italiani, nel calcolo del rateo i giorni sono computati sulla cosiddetta *bound basis* (30/360 per i titoli con cedola annuale, o 30/180 se con cedola semestrale) e gli interessi si iniziano a computare a partire dal primo giorno, a differenza dei titoli non italiani, sui quali gli interessi iniziano a maturare il secondo giorno. Nel caso dei BOT i giorni sono invece calcolati come 'giorni effettivi/365'.

Il giorno di regolamento delle operazioni è normalmente il terzo giorno lavorativo successivo al giorno di negoziazione. L'unica eccezione è rappresentata dai BOT, per i quali il regolamento è a due giorni.

Per quanto concerne, infine, la tassa sui contratti di borsa, sul mercato telematico la tassa è sempre a carico di chi aderisce all'applicazione del *primary dealer* (quindi sempre a carico dei *dealers* o dell'eventuale *primary* che aderisce all'applicazione di un altro *primary*).

<sup>19</sup>La *Reuter* è una società che tramite apposito circuito trasmette i dati provenienti dalle Borse valori.

## 4.5 Il Mercato Italiano dei Futures (MIF)

La legge n. 1/91 (legge sulle Società di Intermediazione Mobiliare) ha inciso e sta incidendo profondamente sull'organizzazione del mercato mobiliare italiano.

L'art. 23 della legge n. 1/91 prevede l'istituzione dei mercati per la negoziazione di contratti a termine e dispone che la CONSOB possa autorizzare, nell'ambito delle borse valori, le negoziazioni di contratti a termine su strumenti finanziari collegati a valori mobiliari quotati nei mercati regolamentati, tassi di interesse e valute, ivi compresi quelli aventi ad oggetto indici su tali valori mobiliari, tassi di interesse e valute.

Per quanto concerne l'organizzazione di tale mercato, la CONSOB è stata delegata ad emanare, con appositi regolamenti, le disposizioni relative all'organizzazione ed alle modalità di svolgimento delle negoziazioni dei contratti a termine, tenuta presente la struttura dei mercati esteri su *futures* ed *options*.

I regolamenti di cui sopra dovranno, tra l'altro, espressamente contenere ai sensi dell'art. 23 citato:

« [...] »

1. La previsione che le aziende ed istituti di credito autorizzati ai sensi della presente legge possano partecipare direttamente alle negoziazioni per movimentare le proprie posizioni sui contratti di cui al comma 1, nonché per effettuare ogni operazione sugli stessi contratti relativi ai valori mobiliari che sono autorizzate a negoziare direttamente.
2. La previsione che operatori specializzati, autorizzati dalla CONSOB ed iscritti ad apposita sezione dell'albo di cui all'articolo 3, comma 1, possano partecipare alle negoziazioni, esclusivamente in nome e per conto proprio, allo scopo di garantire maggiore stabilità e continuità dei prezzi; a tal fine sono stabiliti i criteri per il rilascio delle autorizzazioni, nonché le modalità e i limiti della partecipazione alle negoziazioni da parte di detti operatori; ad essi si applicano, in quanto compatibili, le norme di cui agli articoli 3 e 9.
3. La fissazione, con riferimento alle esigenze di funzionamento del mercato di

- cui al comma 1, d'intesa con la Banca d'Italia, delle modalità e dei limiti di partecipazione dei fondi comuni di investimento mobiliare di cui alla citata legge n. 77 del 1983, al mercato di cui al comma 1.
4. La determinazione dei contratti a termine di cui al comma 1 ammessi alle negoziazioni e delle relative scadenze.
  5. La previsione che le negoziazioni siano effettuate sul mercato di cui all'articolo 20, comma 2, e con l'ausilio delle strutture informatiche e telematiche ivi previste.
  6. La previsione che la liquidazione a mezzo stanza di compensazione dei contratti a termine di cui al comma 1 avvenga esclusivamente per il tramite della cassa di compensazione e garanzia di cui all'articolo 22, comma 3, e che le operazioni siano garantite dal deposito presso la stessa cassa di margini nella misura e con le modalità stabilite anche periodicamente dalla CONSOB con proprie delibere. [...] » .

Lo stesso art. 23, al comma 5, prevede inoltre che:

« Per l'istituzione e la disciplina del mercato dei contratti di cui al comma 1 relativi ai titoli di stato, il ministro del tesoro provvede ai sensi del decreto del Presidente della Repubblica 29 dicembre 1987, n. 556. » . Il mercato italiano dei *futures* sui titoli di Stato è stato istituito con il Decreto del Ministero del Tesoro del 18 febbraio del 1992, pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 44 del 23/2/92.

Il decreto ha istituito un Mercato Italiano *Futures* sui Titoli di Stato (MIF) che ricalca sostanzialmente la struttura organizzativa del Mercato Telematico dei Titoli di Stato (MTS).

Infatti i due mercati:

- Utilizzano lo stesso circuito telematico per le negoziazioni.
- Sono gestiti dal medesimo Comitato di Gestione.
- Si richiede, salvo eccezioni, di essere aderente al MTS per poter aderire al MIF.

Il decreto ministeriale prevede per il nuovo mercato diverse categorie di operatori, che si distingueranno a seconda delle possibilità di poter operare:

- Solo per conto proprio
- Solo per conto terzi
- Sia in conto proprio che in conto terzi.

Alcuni di questi operatori potranno quindi esporre ed eseguire ordini, altri invece potranno eseguire solo ordini. Gli operatori che potranno esporre offerte ed eseguire ordini si dividono in due categorie:

1. Operatori principali
2. Brokers.

La categoria degli operatori principali è costituita esclusivamente da aziende di credito, dalle società di intermediazione mobiliare e, solo fino al 31/12/92, dalle società commissionarie di borsa iscritte, ai sensi dell'art. 11 del DM Tesoro 18/2/92, in un apposito registro tenuto presso la Banca d'Italia. L'iscrizione nel registro comporta l'impegno di formulare in via continuativa offerte di acquisto e di vendita di almeno un tipo di contratto uniforme, per un valore nominale almeno pari ad un miliardo di lire, per l'intera durata di negoziazione del medesimo e di partecipare attivamente al mercato. Nella fase di avvio del mercato, gli operatori principali sono costituiti solo dagli attuali *primary dealers* dell'MTS.

Per poter ottenere l'iscrizione nel registro di cui sopra, e quindi divenire operatori principali, è inoltre necessario:

- Un patrimonio netto superiore a 20 miliardi.
- L'aver effettuato nell'anno precedente quello nel quale si richiede l'iscrizione compravendite di un numero di contratti uniformi per un valore complessivamente non inferiore a 5,000 miliardi.

La categoria dei *brokers* è invece composta delle aziende ed istituti di credito autorizzati, ai sensi dell'art. 16, comma 1, della legge n.1/91 alla negoziazione di valori mobiliari e le società di intermediazione mobiliare autorizzate all'esercizio dell'attività di negoziazione iscritte in un apposito registro tenuto dalla Banca d'Italia e si impegnano ad effettuare esclusivamente negoziazioni per conto terzi. Per l'iscrizione nel registro è necessario avere un patrimonio netto di almeno due miliardi.

Gli operatori che invece potranno eseguire esclusivamente gli ordini sono costituiti da:

- Banca d'Italia.
- Aziende di credito e Società di Intermediazione Mobiliare (SIM), che non rientrino nella categoria degli operatori principali o dei *brokers*, sia in conto proprio che in conto terzi.
- Società di gestione di fondi comuni, solo in conto proprio.
- Agenti di cambio, solo in conto terzi.
- I cosiddetti *locals*, società per azioni con patrimonio netto di almeno due miliardi, con oggetto sociale esclusivo o principale la negoziazione di valori mobiliari esclusivamente per conto proprio e che siano iscritti in un apposito registro tenuto dalla Banca d'Italia.

Il decreto prevede inoltre che l'assemblea degli aderenti al MTS modifichi la Convenzione ed approvi un Protocollo Integrativo per disciplinare il MIF. Le modifiche alla convenzione riguardano essenzialmente:

- La previsione di una assemblea speciale per gli argomenti che riguardano solo il MIF.
- Una modifica alla composizione del comitato di gestione in modo da assicurare la rappresentanza degli operatori dei diversi mercati.
- La partecipazione alle riunioni del comitato di gestione, con funzione consultiva, di un rappresentante della cassa di compensazione e garanzia.

L'esecuzione dei contratti *futures* stipulati nel mercato avviene per mezzo della stanza di compensazione con l'intervento della cassa di compensazione e garanzia. La cassa svolge le funzioni di *clearing house*, divenendo immediatamente controparte dei contratti conclusi garantisce gli aderenti dalle eventuali inadempienze degli altri aderenti, calcolando ed incassando i margini iniziali di garanzia e ricevendo o versando i guadagni o le perdite registrate nella giornata da ciascun aderente.

La cassa di compensazione e garanzia è stata creata per assicurare il buon fine della liquidazione dei contratti stipulati in tutti i mercati regolamentati in Italia. La Cassa non opererà in maniera uniforme: i criteri di intervento e gli operatori coinvolti saranno ben distinti, soprattutto tra mercato azionario e mercato a termine. Per il momento, comunque, è stato definito soltanto il funzionamento della cassa nel mercato telematico dei *futures* sui titoli di Stato. La Cassa si porrà come controparte di ogni contratto *futures* e sarà il venditore per il compratore e il compratore per il venditore. E solo per i mercati a termine potrà attingere al capitale sociale per far fronte all'eventuale inadempienza contrattuale degli operatori. Il compito principale di questo organo, comunque, non è quello di onorare i debiti degli insolventi, quanto quello di prevenire le insolvenze, con un sistema di depositi di garanzia e margini di variazione.

Tutti gli operatori del mercato dei *futures* aderiscono alla cassa, nella veste, alternativamente, di:

- **Aderenti generali.** Aziende di credito, società di intermediazione mobiliare e, fino al 31/12/1992, società commissionarie di borsa che hanno un patrimonio netto di almeno 100 miliardi. Gli aderenti generali diventano controparti della cassa sia per i contratti *futures* da essi conclusi sia per i contratti conclusi dagli aderenti indiretti con cui hanno stipulato un accordo.
- **Aderenti individuali.** Aziende di credito, società di intermediazione mobiliare e, fino al 31/12/1992, società commissionarie di borsa che hanno un patrimonio netto di almeno 5 miliardi. Gli aderenti individuali diventano controparti della cassa solo per i contratti *futures* da essi conclusi.
- **Aderenti indiretti.** I rimanenti operatori ammessi ad operare in *futures*, che



non diventano controparti della cassa e si devono quindi avvalere di un aderente generale con il quale devono stipulare un accordo.

Per aderire alla cassa non è necessario partecipare al capitale della stessa. I soci fondatori della cassa, la quale giuridicamente si configura come una società di capitali nella forma di società per azioni, sono 22 *primary dealers* dell'MTS che hanno sottoscritto e versato 55 miliardi di capitale sociale, capitale che sarà successivamente elevato fino a 100 miliardi per consentire agli altri aventi diritto di diventare soci. I soci fondatori della cassa di compensazione e garanzia sono i seguenti:

- Banca Commerciale Italiana
- Banca d'America e d'Italia
- Banca del Salento
- Banca Nazionale dell'Agricoltura
- Banca Nazionale del Lavoro
- Banca Popolare di Milano
- Banca Popolare di Novara
- Banco di Napoli
- Banco di Roma
- Banco di Santo Spirito
- Banco di Sardegna
- Banco di Sicilia
- Cassa di Risparmio delle Provincie Lombarde
- Cassa di Risparmio di Torino
- Cassa di Risparmio di Verona, Vicenza, Belluno e Ancona

- Credito Italiano
- Credito Romagnolo
- Istituto Bancario San Paolo di Torino
- ICCRI
- Monte dei Paschi di Siena
- Caboto
- Sigeco.

La Cassa gestirà a nome di ogni aderente solo un conto proprio ed un conto terzi. Gli aderenti generali, oltre ai propri due conti, avranno diritto ad altri due conti per ciascun aderente indiretto che si appoggerà ad essi. Si è quindi optato per calcolare i margini iniziali sulla posizione netta detenuta alla fine di ogni giornata in ciascuno dei conti aperti a nome dell'aderente.

Al riguardo in relazione alle operazioni concluse, sono dovute alla Cassa tre diverse tipologie di margini:

- Margini iniziali (che possono essere distinti in margini ordinari, margini *straddle* e margini su consegna).
- Margini di variazione.
- Margini infragiornalieri.

I margini iniziali ordinari, sono dovuti alla Cassa a fronte di ogni nuova posizione aperta e servono di garanzia nei casi di inadempienza degli intermediari. L'aliquota dei margini ordinari è stata fissata inizialmente nella misura dello 0,8% del valore nominale del contratto, mentre attualmente è pari all'1,8%.

I margini *straddle*<sup>20</sup> sono margini ridotti che la Cassa applica secondo le modalità definite dall'art. 9 del regolamento quando un operatore ha posizioni di segno opposto

<sup>20</sup>Compravendita eseguita su due scadenze dello stesso contratto *futures*. Esempio: acquisto del BTP *futures* Dicembre '91 e contemporanea vendita del Marzo '92.

(acquisto o vendita) su *futures* di diverse scadenze. L'aliquota dei margini *straddle* è fissata inizialmente nella misura dello 0,4% del valore nominale del contratto, mentre attualmente è pari allo 0,9%.

I margini su consegna vengono calcolati sulle posizioni rimaste aperte all'ultimo giorno di contrattazione su una determinata scadenza. Essi tengono conto del lasso di tempo che intercorre tra l'ultimo giorno di contrattazione e la data di liquidazione (pari a quattro giorni lavorativi) e del fatto che in questo periodo non vengono più corrisposti i margini di variazione. L'aliquota del margine su consegna è stata fissata nella misura del 2% del valore nominale del contratto.

I margini di variazione (come già precedentemente detto) sono dovuti alla Cassa degli aderenti generali ed individuali che hanno subito una variazione sfavorevole di prezzo e sono dovuti invece dalla Cassa agli aderenti generali ed individuali che hanno beneficiato di una variazione favorevole di prezzo.

I margini infragiornalieri possono essere richiesti dalla Cassa quando i prezzi dei contratti conclusi sul mercato registrano una variazione rispetto al prezzo di chiusura del giorno precedente superiore ai due terzi del margine iniziale. L'integrazione del margine iniziale avviene sulla base delle posizioni nette detenute in quel momento dagli aderenti e la misura si ottiene moltiplicando le posizioni nette per l'apposito margine stabilito dalla Cassa che non può eccedere quello esistente di un ammontare superiore alla metà dello stesso.

La cassa, alla chiusura di ogni sessione del mercato, elaborerà le informazioni sui contratti conclusi ed invierà a ciascun aderente diretto, tramite la rete usata per le contrattazioni, una serie di resoconti che evidenzieranno l'importo a credito/debito dell'aderente. L'eventuale importo a debito dell'aderente nei confronti della cassa deve essere versato su un conto accentrato aperto dalla Banca d'Italia a nome della Cassa.

Il taglio del contratto è pari a 250 milioni, con un paniere di titoli consegnabili composto da BTP con vita residua, al giorno di consegna del contratto, ricompresa tra gli otto e i dieci anni e data di consegna fissata al decimo giorno del mese<sup>21</sup> Il

<sup>21</sup>Nel Dicembre 1992 sono iniziate le contrattazioni del primo BTP *futures* a medio termine per i titoli di Stato a tasso fisso con vita residua compresa tra i 3,5 e i 5 anni (BTP *futures* a 5 anni). Il decreto del Tesoro firmato l'11 Dicembre 1992 ha stimato il valore minimo del margine iniziale

tasso facciale del contratto è del 12%. Il margine iniziale è stato fissato all'1,8%. Pur essendo un mercato telematico, contrariamente all'MTS, il MIF sarà un mercato anonimo basato sull'incrocio automatico degli ordini. Nel caso in cui esistano più offerte con il medesimo prezzo *best*, l'ordine verrà eseguito dando priorità:

- Alle offerte esistenti formulate dallo stesso intermediario che immette l'ordine.
- Alle offerte fatte per conto della clientela.
- Alle offerte immesse per prime.

Le caratteristiche del contratto *futures*<sup>22</sup> del MIF sui Buoni del Tesoro Poliennali sono:

1. **Unità di contrattazione.** Lit. 250 milioni di valore nominale di un titolo di Stato Italiano nozionale con cedola al 12% distribuita semestralmente.
2. **Valore del tick.** Lit. 25000.
3. **Mesi di consegna.** Marzo, Giugno, Settembre e Dicembre.
4. **Giorno di consegna/liquidazione.** Decimo giorno di calendario del mese di consegna, o giorno lavorativo successivo, se festivo.
5. **Ultimo giorno di contrattazione.** Quattro giorni lavorativi antecedenti i giorni di consegna.
6. **Quotazione.** Per Lit. 100 di valore nominale.
7. **Movimento minimo di prezzo.** 0,01 Lit.

ordinario allo 0.5 per cento del valore nominale (equivalente a Lit. 1250000), il margine *straddle* allo 0.2 per cento (equivalente Lit. 500000) e il margine per la consegna all' 1.2 per cento (3 milioni). Il nuovo contratto è stato disegnato essenzialmente per gli operatori Italiani attivi sul mercato dei titoli di Stato: sono loro infatti i principali utilizzatori dei BTP con scadenze comprese tra i 3,5 e i 5 anni. Gli operatori stranieri, per conto, si concentrano sui tassi a dieci anni. È per questo che il LIFFE di Londra, dopo aver battezzato il primo BTP *futures* e poi ancora il *futures* sul tasso di interesse a breve termine dell'euro lira.

<sup>22</sup>Il MIF si prepara nel 1993 con 3 novità in cantiere:

le opzioni sui *futures*, un contratto sui tassi a 3 mesi e uno sull'indice MIB. Le opzioni sui *futures* saranno le prime a partire.

8. **Orario di contrattazione.** Dalle 9,15 alle 17,00.
9. **Standard del contratto.** Qualunque BTP con vita residua tra gli 8 e i 10 anni, ammontare emesso di almeno 3,000 miliardi di lire dieci giorni lavorativi prima del 'giorno di liquidazione'.
10. **Prezzo di regolamento (Exchange Delivery Settlement Price).** Valore del titolo nozionale alla consegna accertato dal Comitato di gestione al termine dell'ultimo giorno di contrattazione' del contratto sulla base della media ponderata dei prezzi relativi ai contratti effettuati nel mercato negli ultimi 5 minuti di contrattazione.
11. **Importo della fattura.**

$$I_f = [(E)(P)(2.500.000)] + R_{nm},$$

dove:

$I_f$  = Importo fattura

$E$  = Exchange Delivery Settlement Price

$R_{nm}$  = Rateo netto maturato

$P$  = Fattore di Conversione.

12. **Trasferimento titoli.** Stanza di compensazione titoli.
13. **Margini.** Con decreto del 4 Agosto 1992 pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 185 del 7/8/1992 sono stati stabiliti i margini minimi applicabili: quello iniziale è di Lit. 1500000, pari allo 0,6% del valore nominale del titolo nozionale. Sulle posizioni di segno contrario aperte su diverse scadenze di contratti uniformi a termine relativi al medesimo schema negoziale il margine minimo è di Lit. 600000.

Il margine iniziale minimo sulle posizioni rimaste aperte alla fine dell'ultima giornata di contrattazioni, per le quali si procede alla consegna dei titoli, è di Lit. 3750000.

14. **Prezzo di chiusura.** Prezzo del titolo nozionale riferito proporzionalmente a cento lire di valore nominale, giornalmente accertato dopo il termine di ogni sessione di contrattazione dalla Cassa di Compensazione e garanzia secondo i criteri stabiliti nel proprio regolamento.
15. **Prezzo di negoziazione.** Prezzo riferito proporzionalmente a cento lire di capitale nominale, al quale il contratto è concluso attraverso l'incontro della 'proposta' con l'ordine'.
16. **Prezzo di regolamento alla consegna.** Valore del titolo nozionale, riferito proporzionalmente a cento lire di valore nominale, accertato dal Comitato di gestione al termine dell'ultimo giorno di contrattazione del contratto, sulla base della media ponderata dei prezzi relativi ai contratti effettuati sul Mercato negli ultimi 5 minuti di contrattazione.

## 4.6 Caratteristiche dei Prezzi Futures

### 4.6.1 Distribuzione delle Differenze Prime dei Prezzi Futures

Posto  $\{y_t\}_{t=1,2,\dots,T}$  la successione delle osservazioni relative al prezzo *futures* di un determinato bene e  $\{\nabla y_t\}_{t=1,2,\dots,T-1}$ <sup>23</sup> la successione delle differenze prime, numerosi studi sono stati fatti per determinare la distribuzione campionaria di  $\nabla Y_1, \nabla Y_2, \dots, \nabla Y_{T-1}$ . La maggior parte dei lavori evidenziano caratteristiche simili per differenti beni e periodi: innanzitutto la distribuzione delle differenze prime dei prezzi *futures* risulta quasi sempre leptocurtica e quindi non normale. Inoltre, per quanto riguarda il tipo

<sup>23</sup>Con

$$\{\nabla Y_t\}_{t=1,2,\dots,T-1}$$

si intende la successione delle variabili aleatorie le cui determinazioni sono

$$\{\nabla y_t\}_{t=1,2,\dots,T-1}.$$

specifico di distribuzione delle differenze prime di tali prezzi *futures*, due sono le distribuzioni ipotizzate: la stabile<sup>24</sup> Paretiana (simmetrica, come la distribuzione normale, ma leptocurtica) oppure una combinazione di distribuzioni normali. La tabella 1 riepiloga i risultati dei lavori più importanti a questo proposito<sup>25</sup>.

Altri studi hanno esaminato se la serie temporale delle differenze prime dei prezzi *futures* è autocorrelata. La questione è di notevole importanza pratica, in quanto, se la serie temporale delle differenze prime esibisce autocorrelazione del primo ordine, allora una differenza prima positiva tende ad essere seguita da un'altra differenza positiva nel periodo successivo. Se la correlazione è marcata, si possono quindi adottare strategie per trarre profitto da questa tendenza: ad esempio, con una autocorrelazione positiva del primo ordine, si potrebbe adottare la strategia di comprare contratti *futures* non appena si verifica un aumento di prezzo sicuri che il secondo aumento del prezzo genererà un profitto. Molti studi confermano la presenza di autocorrelazione del primo ordine nelle serie temporali delle differenze prime dei prezzi *futures*. La tabella 2 riassume i risultati degli studi più importanti<sup>26</sup>.

#### 4.6.2 La Volatilità dei Prezzi Futures

I tre aspetti che hanno ricevuto maggiore attenzione in letteratura riguardo alla volatilità dei prezzi *futures* sono

1. Trasmissione di volatilità dal mercato *futures* al mercato *cash*
2. Data di scadenza e volatilità dei prezzi *futures*
3. Volume e volatilità dei prezzi *futures*.

<sup>24</sup>Introducendo la notazione  $U \stackrel{d}{=} V$  per indicare che due variabili aleatorie  $U$  e  $V$  hanno la stessa distribuzione. Perciò  $U \stackrel{d}{=} aV + b$  significa che la distribuzione di  $U$  e  $V$  differiscono soltanto per un cambiamento di origine e di scala. La distribuzione  $R$  è stabile (in senso lato) se per ogni  $n$  esistono costanti  $c_n > 0$ ,  $y_n$  tali che

$$S_n \stackrel{d}{=} c_n X + y_n, \quad (57)$$

con  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$  variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite,  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  e  $R$  non è concentrata in un solo punto.  $R$  è stabile in senso stretto se la 57 vale per  $y_n = 0$  [Feller (1966)].

<sup>25</sup>La tabella 1 è una rappresentazione parziale tratta da Kolb (1991).

<sup>26</sup>Riproduzione parziale di una analogia contenuta in Kolb (1991).

**Mercato Futures e volatilità nel Mercato Cash.** Alcuni osservatori affermano che l'introduzione dei mercati *futures* ha reso il prezzo del bene sottostante più volatile. Essi arguiscono che l'incremento di volatilità nel mercato *stock* è dovuto all'introduzione delle contrattazioni di *futures* sugli indici di borsa. Solitamente queste critiche sono accompagnate da proposte per una più stretta regolazione delle contrattazioni in *futures*.

Molti studi sull'effetto dei *futures* sul mercato *cash* comparano la volatilità del mercato *cash* prima e dopo l'introduzione delle contrattazioni in *futures*. Studi empirici sembrano suggerire che le contrattazioni in *futures* non incrementano la volatilità nel mercato *cash*. Altri addirittura argomentano che la volatilità nel mercato *cash* è diminuita dopo l'introduzione dei mercati *futures*. I lavori su questo argomento sono riassunti<sup>27</sup> nella tabella 3.

**Data di scadenza e volatilità del prezzo futures.** Samuelson (1965) asserì che la volatilità dei prezzi *futures* è maggiore quando il contratto si avvicina alla data di scadenza. Questa ipotesi è conosciuta nella letteratura dei mercati *futures* come l'ipotesi di Paul Samuelson.

Nella sua analisi Samuelson assume che le forze competitive nei mercati *futures* portino il prezzo *futures* ad un livello pari al valore atteso del prezzo *spot* alla fine del contratto. Sotto questa ipotesi, il prezzo *futures* segue un processo martingala. Il valore atteso del prezzo al tempo  $t + 1$  eguaglia il prezzo al tempo  $t$ . Il valore atteso della variazione del prezzo è zero. Alta volatilità nei prezzi implica consistenti cambiamenti dei prezzi. I mutamenti nei prezzi sono più marcati quando si hanno maggiori informazioni sul bene sottostante. All'inizio della vita del contratto *futures* si hanno poche informazioni sul prezzo *spot* futuro del bene sottostante. In seguito, non appena il contratto si avvicina alla maturità, le informazioni aumentano. Ad esempio, un anno prima della raccolta del mais le informazioni disponibili sono poche. All'avvicinarsi della raccolta, il mercato si forma un'idea migliore sul prezzo finale del mais. Per un contratto che spira vicino alla raccolta, il modello di Samuelson<sup>28</sup> implica che il prezzo *futures* ha volatilità maggiore con l'approssimarsi della raccolta.

<sup>27</sup> La tabella 3 è una copia parziale di una analoga contenuta in Kolb (1991).

<sup>28</sup> L'ipotesi di Samuelson congettura volatilità stagionale per i prezzi *futures* ed in particolare quella legata alla data di scadenza del contratto *futures*.



La tabella 4 riassume<sup>29</sup> alcuni degli studi che hanno esaminato l'ipotesi di Samuelson. **Volume e Volatilità dei Prezzi Futures.** Diversi studi hanno argomentato una marcata correlazione positiva tra il volume delle contrattazioni *futures* e la volatilità dei *futures*<sup>30</sup> La volatilità dei prezzi *futures* aumenta all'aumentare delle informazioni nel mercato. Gli operatori, le cui transazioni sono basate sull'informazione, aumentano il volume delle contrattazioni quando nuove informazioni arrivano nel mercato. Perciò non sorprende che le due variabili siano correlate positivamente.

## 4.7 Hedging

### 4.7.1 Nozioni Generali

L'*hedging* è l'uso dei mercati *futures* per ridurre un rischio preesistente nel mercato *cash*. Consiste nell'effettuare una transazione nel mercato *futures* come temporanea sostituta di una analoga transazione nel mercato *cash*. Gli *hedgers* sono i produttori oppure i maggiori consumatori di un determinato bene, ad esempio alla categoria degli *hedgers* in frumento appartengono sia i produttori di frumento che le grosse aziende produttrici di pane. Il produttore di frumento, temendo che il prezzo scenda al momento del raccolto, può coprirsi vendendo anticipatamente il raccolto nei mercati *futures* (*short hedge*); questo può avvenire anche prima della semina. Analogamente

<sup>29</sup> Riproduzione parziale di una analoga contenuta in Kolb (1991).

<sup>30</sup> Le analisi empiriche sulla relazione tra prezzo e volume nei mercati *futures* iniziano con il lavoro di Clark (1973). Egli trova una relazione positiva tra il quadrato della variazione dei prezzi e il volume aggregato usando dati giornalieri tratti da un mercato *futures* sul cotone. Cornell (1981) esamina 17 contratti *futures* e trova una correlazione positiva tra le variazioni nel volume e le variazioni nei prezzi per ogni tipo di contratto *futures*. Tauchen and Pitts (1983), usando dati giornalieri sui *Treasury-bill futures*, trovano che la variabilità delle variazioni di prezzo è positivamente correlata al volume trattato. Karpoff (1987) divide le analisi empiriche in:

- Analisi empiriche che esaminano la relazione tra variazioni assolute di prezzo e volume
- Analisi empiriche che esaminano la relazione tra variazioni relative di prezzo e volume.

Egli trova che 18 delle 19 analisi nella prima categoria mettono in evidenza una correlazione positiva tra le variazioni assolute di prezzo e volume; 12 dei 16 studi nella seconda categoria trovano una correlazione positiva tra variazioni relative di prezzo e volume. Najand and Yung (1991) utilizzano un modello di regressione GARCH univariato per analizzare la relazione tra la variabilità dei prezzi e volume nei mercati *futures*.

il fornaio può coprire il bisogno atteso di frumento, temendo che il prezzo salga, diversi mesi prima del bisogno effettivo acquistando contratti *futures* sul frumento (*long hedge*). La seconda funzione sociale dei mercati *futures*, oltre a quella di prevedere il prezzo come accennato nel paragrafo 4.1, è quindi quella di ridurre il rischio sia dei produttori che dei consumatori.

Ciò che distingue le operazioni di *trading* (o speculative) da quelle di *hedging* è l'avversione al rischio dell'operatore.

Gli speculatori sono caratterizzati da una forte propensione al rischio, mentre gli *hedgers* sono operatori avversi al rischio. Una operazione di *hedging* consente di ridurre (in tutto in parte) il rischio trasferendolo ad un altro soggetto. Ovviamente tale trasferimento non avviene senza costi: nel caso particolare dei *futures*, che garantiscono la copertura 'bilaterale', il costo consiste nella rinuncia ai profitti potenzialmente conseguibili. Si ha anche la possibilità di distinguere l'*hedger* dal *trader* analizzando la situazione di partenza del portafoglio. L'*hedger* ha posizioni aperte non per deliberato intento speculativo ma in seguito alla sua attività. Lo speculatore invece ha una posizione in titoli neutra che viene aperta per deliberata decisione in funzione delle proprie aspettative sul corso futuro dei titoli.

Sono stati evidenziati, per maggior chiarezza, tre criteri che debbono essere considerati per fare in modo che si abbia operazione di *hedging* piuttosto che quella di *trading*.

1. **Scopo:** La transazione deve fornire una copertura. Ciò implica la necessità di provare l'utilizzo della transazione come copertura e di identificare lo scopo esatto. Pertanto, al momento della stipula di un contratto *futures*, lo scopo dovrà essere identificato e documentato specificatamente, unitamente all'attività o passività che si intende coprire e alla durata della copertura.
2. **Correlazione:** È necessaria un'elevata correlazione fra il prezzo del contratto *futures* e l'attività o la passività coperta così che entrambi subiscano lo stesso tipo di variazione. Ciò richiede un abbinamento il più accurato possibile fra il contratto e l'attività o la passività da coprire in termini di sensibilità alle variazioni dei tassi d'interesse, capitale e data di consegna.

3. **Certezza:** Nel caso delle coperture anticipate (cioè, relative a transazioni che si prevede verranno effettuate ad una data futura) ci si dovrebbe ragionevolmente aspettare che l'operazione nel mercato a pronti venga eseguita. Anche questa affermazione deve chiaramente essere dimostrata dall'esperienza.

Il primo criterio è fondamentale. Se l'intento è quello che la transazione offra una copertura, dovrebbe essere possibile registrare quest'intenzione e le sue motivazioni all'inizio dell'operazione. Inoltre, allo scopo di stabilire un adeguato controllo interno sarà necessario registrare la natura e lo scopo della transazione, così da seguirla nelle fasi successive e notificarla debitamente al *management*.

Il secondo criterio è di natura più reale. Una correlazione ragionevole o quanto meno un'aspettativa ragionevole circa la possibilità di correlazione è un fattore di cui la direzione dovrebbe essersi accertata prima di dare inizio ad una transazione, avente per scopo la copertura, con informazioni che dovrebbero essere disponibili anche da altri, compresi i revisori della società stessa.

Il terzo criterio non sarà sempre rilevante. Qualora lo fosse la direzione della società dovrebbe chiarire i propri piani relativi a transazioni *futures* nel mercato a pronti. Non sarebbe irragionevole per un revisore aspettarsi che si sia tenuta una buona registrazione della pianificazione prima, e in un secondo tempo della effettuazione nel mercato a pronti delle transazioni previste. Questo criterio è particolarmente importante per la copertura di incassi o pagamenti futuri e incerti ed esercita un'influenza fondamentale sulle modalità di contabilizzazione di questo tipo di operazione. Grande è l'importanza degli strumenti di *hedging* in mercati sviluppati quali il Mercato Secondario Telematico dei Titoli di Stato e l'ampiezza della classe di soggetti ad essi interessati (non limitata ad operatori professionali come nel caso dell'arbitraggio).

In linea generale si possono distinguere due tipi di operazioni di copertura:

1. *Cash hedge* quando si desidera proteggere una posizione esistente sul mercato *cash*.
2. *Anticipatory hedge* quando l'obiettivo è quello di coprire una posizione che ci si aspetta di conseguire in un dato momento futuro sul mercato *cash*.

Allo scopo di comprendere come realizzare praticamente una copertura, può essere utile considerare un esempio concreto di *cash hedge*. Si supponga di detenere una posizione lunga in titoli. Ad essa è associato un rischio connesso a possibili variazioni inattese dei tassi di interesse. Tramite la vendita di contratti *futures* sui titoli in esame o su titoli simili è possibile proteggersi (entro certi limiti) da questo rischio. L'ipotesi sottostante a tale strategia di copertura è l'esistenza di una correlazione positiva tra il prezzo del titolo e quello del *futures*. Evidentemente tale correlazione sarà molto elevata nel caso si utilizzi il *futures* sullo specifico titolo (*direct hedge*). Se invece questo non esiste si dovrà ricorrere al *futures* su uno strumento simile (*cross hedge* cioè copertura incrociata). In quest'ultima circostanza sarà molto importante verificare l'intensità della correlazione tra la quotazione del titolo e quella del *futures*. Proseguendo con l'esempio di *cash hedge*, la correlazione positiva tra i due strumenti implica che al diminuire del prezzo del titolo si avrà una diminuzione del prezzo del *futures*: dunque il guadagno sulla posizione *futures* (corta) compenserà la perdita su quella pronti. Importante è anche la distinzione tra *short hedge* e *long hedge*. Si parla di *short hedge* quando l'operatore vende contratti *futures* mentre di *long hedge* quando l'operatore compra contratti *futures*. Proponiamo ora la teoria tradizionale per la ricerca dell'*hedge ratio* ottimo<sup>31</sup>.

#### 4.7.2 Teoria Tradizionale per Trovare Hedge Ratio Ottimo

Si supponga che un operatore finanziario sia in possesso di  $n$  titoli a reddito fisso e che desideri sottoporre ad *hedging* una frazione  $h$  di essi assumendo una posizione lunga. La frazione  $h$  è chiamata *hedge ratio*. Sia

$$\Delta P = \Delta S - h\Delta F,$$

la variabile aleatoria ritorno complessivo<sup>32</sup>, dove  $\Delta S$  è la variabile aleatoria sulla posizione *cash* e  $\Delta F$  quella sulla posizione *futures*<sup>33</sup>. Disponendo di un campione

<sup>31</sup> Per maggiori informazioni vedere Kolb (1991), Ederington (1979) oppure Cecchetti, Cumby e Figlewski (1988).

<sup>32</sup>  $\Delta P_t$  rappresenta il ritorno complessivo tra il tempo  $t$  e il tempo  $t - 1$ .

<sup>33</sup> Per ritorno sulla posizione *cash* e *futures* si intende la differenza tra il prezzo al tempo  $t$  e il prezzo al tempo  $t - 1$ . Ad esempio

$$\Delta S = S_t - S_{t-1},$$

di  $T$  osservazioni su  $\Delta S$  e  $\Delta F$  l'operatore finanziario può desiderare di trovare quel valore di  $h$  che minimizza  $VAR[\Delta P]$  per poi utilizzare questo valore per un certo intervallo di tempo successivo. Minimizzando  $VAR[\Delta P]$  si vuole trovare quel valore di  $h$  che minimizza il rischio<sup>34</sup>. Il valore atteso di  $\Delta P$  è

$$\begin{aligned} E[\Delta P] &= E[\Delta S] - hE[\Delta F] \\ &= \mu_s - h\mu_f, \end{aligned}$$

mentre la varianza di  $\Delta P$  è

$$\begin{aligned} VAR[\Delta P] &= E [[(\Delta S - h\Delta F) - (\mu_s - h\mu_f)]^2] \\ &= E[(\Delta S - \mu_s)^2] + h^2 E[(\Delta F - \mu_f)^2] \\ &\quad - 2hE[(\Delta S - \mu_s)(\Delta F - \mu_f)] \\ &= \sigma_s^2 + h^2\sigma_f^2 - 2h\sigma_{sf}. \end{aligned}$$

Il valore di  $h$  che minimizza<sup>35</sup>  $VAR[\Delta P]$  è

$$h^* = \frac{\sigma_{sf}}{\sigma_f^2}. \quad (59)$$

L'equazione 59 può essere riscritta come

$$h^* = \rho \frac{\sigma_s}{\sigma_f},$$

con  $\rho$  coefficiente di correlazione tra  $\Delta S$  e  $\Delta F$ . Perciò se  $VAR[\Delta F] \geq VAR[\Delta S]$ , come si verifica nella pratica [Cecchetti, Cumby and Figlewski (1988)],  $h^*$  non può essere superiore in valore assoluto a  $\rho$  che per definizione è compreso tra -1 e 1.

\_\_\_\_\_ rappresenta la differenza tra il prezzo *spot* del titolo al tempo  $t$  e il prezzo dello stesso al tempo  $t-1$ .

<sup>34</sup>La varianza è un indice adatto a misurare la variabilità e perciò il rischio.

<sup>35</sup>Il valore ottimo si ottiene risolvendo l'equazione

$$2h\sigma_f^2 - 2\sigma_{sf} = 0. \quad (58)$$

Il valore di  $h$  che rende risolve l'equazione 58 è punto di minimo in quanto

$$\frac{d^2 VAR[\Delta P]}{d^2 h} = 2h\sigma_f^2 > 0.$$

L'*hedge ratio* secondo la teoria tradizionale è costante nel tempo. Il metodo pratico che viene adottato per stimare  $h^*$  è di regredire  $\Delta S$  su  $\Delta F$  e di utilizzare il coefficiente angolare come stima di  $h^*$ .<sup>36</sup>

### 4.7.3 Hedging Dinamico

La stima tradizionale dell'*hedge ratio*, trovata regredendo lo strumento da sottoporre ad *hedging* su lo strumento adoperato per effettuare l'*hedging*, è data dal rapporto tra la stima della covarianza non condizionata e la varianza non condizionata. Già Park e Bera (1987) arguirono che quando si utilizza il *cross-hedging*<sup>37</sup> i residui di regressione sono caratterizzati da effetto ARCH e che modellando l'eteroschedasticità utilizzando un modello ARCH(1) lineare (vedere anche Bera, Park e Bubnys (1987)) si possono ottenere stime dell'*hedge ratio* più efficienti rispetto all'approccio tradizionale. Successivamente vari autori hanno riscontrato che la sistematica dipendenza dal tempo dei momenti secondi condizionati per le serie finanziarie a più alta volatilità, come ad esempio *futures* sui tassi di interesse, comporta generalmente *hedge ratios*, funzioni delle varianze e covarianze condizionate, dipendenti dal tempo.

Cecchetti, Cumby e Figlewski (1988), ad esempio, hanno utilizzato un ARCH(3)

<sup>36</sup>La stima del coefficiente angolare per la funzione

$$\Delta S = \alpha + \beta \Delta F + \varepsilon_t,$$

è

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (\Delta S - \bar{\Delta S})(\Delta F - \bar{\Delta F})}{\sum_{t=1}^T (\Delta F - \bar{\Delta F})^2}, \quad (60)$$

al numeratore la 60 ha la covarianza campionaria tra  $\Delta S$  e  $\Delta F$ , mentre al denominatore ha la varianza campionaria di  $\Delta F$ .

<sup>37</sup>Per *cross hedging* si intende *hedging* in cui le caratteristiche delle posizioni *spot* e *futures* non coincidono perfettamente. Secondo Kolb (1991) le posizioni *spot* e *futures* possono differire per tre fattori:

1. L'orizzonte di *hedging* può non coincidere con la data di scadenza del contratto *futures*.
2. La quantità sottoposta ad *hedging* può non coincidere con la quantità del contratto *futures*.
3. In riferimento ad *cross-hedging* su beni, ad esempio, le caratteristiche fisiche del bene da sottoporre ad *hedging* possono differire da quelle del bene oggetto del contratto *futures*.

Per approfondimenti sul *cross-hedging* si veda Anderson e Danthine (1981).

bivariato lineare a correlazioni costanti per *Treasury Bonds* a 20 anni e *Treasury bonds futures*. Sia la stima dell'*hedge ratio* che minimizza il rischio che dell'*hedge ratio* che ottimizza la funzione di utilità dimostrano una sostanziale variazione nel periodo campionario. Baillie e Myers (1989) adattando ai prezzi *cash* e *futures* di 6 beni varie tipologie di modelli GARCH bivariati<sup>38</sup> hanno decisamente affermato che l'assunzione standard di un *hedge ratio* non dipendente dal tempo è inappropriata.

#### 4.7.4 Approccio Proposto da Baillie e Myres per Trovare l'Hedge Ratio Ottimo

L'approccio<sup>39</sup> di Baillie e Myers (1989) estende la metodologia adottata in Cecchetti, Cumby e Figlewski (1988), i quali hanno utilizzato un modello ARCH univariato per stimare l'*hedge ratio* assumendo costante la correlazione condizionata tra i prezzi *cash* e i prezzi *futures*.

Supponiamo che un operatore finanziario sia in possesso di  $n$  titoli a reddito fisso e che desideri sottoporre ad *hedging* una frazione  $h$  di essi assumendo una posizione lunga. Sia

$$\Delta P_t = \Delta S_t - h_{t-1} \Delta F_t,$$

la variabile aleatoria che rappresenta il ritorno complessivo, con  $h_{t-1}$  *hedge ratio* variabile nel tempo. Sia  $U(\cdot)$  la funzione di utilità dell'operatore finanziario<sup>40</sup>. L'obiettivo è massimizzare il valore atteso della variabile aleatoria ( $u(\Delta P_t) | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2$ ) rispetto ad  $h_{t-1}$ , con

$$\Psi_{t-1}^1 = (\Delta S_{t-1}, \Delta S_{t-2}, \dots)$$

e

$$\Psi_{t-1}^2 = (\Delta F_{t-1}, \Delta F_{t-2}, \dots).$$

Il valore atteso condizionato di  $u(\Delta P_t)$  è

<sup>38</sup>Dalla matrice delle varianze-covarianze condizionata di un processo GARCH, come vedremo in seguito, è possibile ricavare l'*hedge ratio* ottimo.

<sup>39</sup>Per maggiori informazioni vedere l'appendice di Baillie e Myers (1989).

<sup>40</sup>La  $U(\cdot)$  è supposta funzione di Von Neumann-Morgenstern crescente e concava.

$$E[u(\Delta P_t) | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\Delta S_t - h_{t-1} \Delta F_t) f(\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) d\Delta S_t d\Delta F_t,$$

dove  $f(\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2)$  è la funzione di densità di probabilità congiunta condizionata. Derivando rispetto ad  $h_{t-1}$  e ponendo la derivata uguale a zero si ottiene la condizione del primo ordine.

$$\begin{aligned} \frac{dE[u(\Delta P_t) | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2]}{dh_{t-1}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(\Delta S_t - h_{t-1} \Delta F_t)}{dh_{t-1}} \Delta F_t f(\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) d\Delta S_t d\Delta F_t \\ &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

La concavità della funzione di utilità garantisce che il valore di  $h_{t-1}$  che risolve l'equazione 61 è punto di massimo. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione 61 occorre dimostrare la proposizione 4.7.1.

**PROPOSIZIONE 4.7.1** *Se  $E[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2] = 0$  e  $h_{t-1}^*$  è un valore di  $h_{t-1}$  tale che*

$$f(\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) = f(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1) f(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2),$$

*allora  $h_{t-1}^*$  è soluzione dell'equazione*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(\Delta S_t - h_{t-1} \Delta F_t)}{dh_{t-1}} \Delta F_t f(\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) d\Delta S_t d\Delta F_t = 0.$$

*Dimostrazione.* Senza perdere di generalità le condizioni del primo ordine possono essere scritte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(\Delta P_t)}{dh_{t-1}} \Delta F_t f(\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) d\Delta P_t d\Delta F_t = 0, \quad (62)$$

dove  $f(\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2)$  è la funzione di densità di probabilità condizionata di  $\Delta P_t$  e  $\Delta F_t$  rispetto a  $\Psi_{t-1}^1$  e  $\Psi_{t-1}^2$ . Per ipotesi  $h_{t-1}^*$  è tale che

$$f(\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) = f(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1) f(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2),$$



quindi la 62 può essere scritta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(\Delta P_t)}{dh_{t-1}} f(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1) d\Delta P_t \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta F_t f(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2) d\Delta F_t = 0. \text{ c.v.d.}$$

Sempre per ipotesi  $E[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2] = 0$  per cui  $h_{t-1}^*$  è soluzione dell'equazione 62.

Quindi se sono soddisfatte le ipotesi della proposizione 4.7.1, essendo  $U(\cdot)$  concava,  $h_{t-1}^*$  massimizza la funzione di utilità dell'operatore finanziario. Se

$$f(\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2),$$

è normale bivariata allora quando le variabili aleatorie  $\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1$  e  $\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2$  sono incorrelate sono anche indipendenti. La proposizione 4.7.2 fornisce il valore di  $h_{t-1}$  che rende  $\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1$  e  $\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2$  incorrelate.

**PROPOSIZIONE 4.7.2** *Siano*

$$(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) = (\Delta S_t - h_{t-1} \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2)$$

e

$$\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2,$$

due variabili aleatorie condizionate. Allora un valore di  $h_{t-1}$  tale che

$$COV[\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2] = 0$$

è

$$h_{t-1}^* = \frac{COV[\Delta P_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2]}{VAR[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2]}.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} COV[(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1), (\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2)] &= E [ [(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2) - E[(\Delta P_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2)]] \\ &\quad [(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2) - E[(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2)]] ] \\ &= E [ [(\Delta S_t | \Psi_{t-1}^1) - h_{t-1}(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2) + \\ &\quad - E[\Delta S_t | \Psi_{t-1}^1] + h_{t-1} E[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2]] [(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2) + \\ &\quad - E[(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2)]] ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ -h_{t-1} [(\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2) - E[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2]] \right. \\
&\quad [(\Delta S_t | \Psi_{t-1}^1) - E[\Delta S_t | \Psi_{t-1}^1]] + \\
&\quad \left. [(\delta F_t | \Psi_{t-1}^2) - E[(\delta F_t | \Psi_{t-1}^2)]]^2 \right] \\
&= COV[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2, \Delta S_t | \Psi_{t-1}^1] + \\
&\quad -h_{t-1} VAR[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2], \tag{63}
\end{aligned}$$

ponendo uguale a zero l'equazione 63 e risolvendo rispetto a  $h_{t-1}$  si ottiene

$$h_{t-1}^* = \frac{COV[\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2]}{VAR[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2]}. \text{ c.v.d.}$$

A differenza dell'approccio tradizionale l'*hedge ratio* ottimo adottato da Baillie e Myers (1989) dipende dal tempo. Supposto che

$$\Delta \varepsilon | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon &= \begin{pmatrix} \Delta S_t \\ \Delta F_t \end{pmatrix} \\
&e \\
\Psi_{t-1} &= \begin{pmatrix} \Psi_{t-1}^1 \\ \Psi_{t-1}^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

sia un processo ARCH bivariato, la stima della matrice delle varianze-covarianze condizionata, come precedentemente accennato, può essere utilizzata per stimare  $h_{t-1}^*$ .

## 4.8 Elenco Abbreviazioni

Proponiamo un elenco delle abbreviazioni utilizzate nel presente capitolo.

Borse Valori<sup>41</sup>:

- CBT: Chicago Board of Trade
- CBOE: Chicago Board Options Exchange

<sup>41</sup>Le sigle riguardanti le Borse Valori sono tratte da Steinbeck e Erickson (1988).

- **CME:** Chicago Mercantile Exchange
- **IMM:** International Monetary Market (è una divisione del CME)
- **LCE:** London Commodity Exchange
- **LIFFE:** London International Financial Futures Exchange
- **LME:** London Metal Exchange
- **MIF:** Mercato Italiano Futures
- **MTS:** Mercato Telematico dei titoli di Stato (Italiani)
- **NYCE:** New York Cotton Exchange
- **NYMEX:** New York Mercantile Exchange.

**Altre Sigle:**

- **ABI:** Associazione Bancaria Italiana
- **BOT:** Buoni Ordinari del Tesoro
- **BTP:** Buoni del Tesoro Poliennali
- **CONSOB:** Commissione Nazionale per le Società e la Borsa
- **CTE:** Certificati del Tesoro in ECU
- **CTO:** Certificati del Tesoro con Opzione
- **CTR:** Certificati del Tesoro Reali
- **CTS:** Certificati del Tesoro a Sconto
- **CCT:** Certificati di Credito del Tesoro (a tasso variabile)
- **ECU:** Unità monetaria della Comunità Europea
- **EDSP:** Exchange Delivery Settlement Price

- **LCH: London Clearing House**
- **SIA: Società Interbancaria per l'Automazione**
- **SIM: Società di Intermediazione Mobiliare.**

Tabella 1: Differenze Prime dei Prezzi Futures.

RISULTATI EMPIRICI SULLA DISTRIBUZIONE DELLE DIFFERENZE PRIME DEI PREZZI FUTURES	
Studio	Risultato
Stevenson e Bear (1970)	La distribuzione delle differenze prime è leptocurtica.
Dusak (1973)	La distribuzione delle differenze prime è non normale, e sembra essere una mistura di distribuzioni normali.
Tauchen e Pitts (1983)	La distribuzione delle differenze prime sembra essere una mistura di distribuzioni normali
Cornew, Town e Crowson (1984)	La distribuzione delle differenze prime è leptocurtica e simmetrica.
Helms e Martell (1985)	La distribuzione delle differenze prime è non normale.
Hudson, Leuthold e Sarassoro (1987)	La distribuzione delle differenze prime è leptocurtica.
So (1987)	La distribuzione delle differenze prime è non normale e sembra essere stabile Paretiana.
Hall, Brosen e Irwin (1989)	La distribuzione delle differenze prime è leptocurtica e sembra essere una mistura di distribuzioni normali.

Tabella 2: Autocorrelazione delle Differenze Prime dei Prezzi Futures.

<b>EVIDENZA DI AUTOCORRELAZIONE NELLE DIFFERENZE PRIME DEI PREZZI FUTURES</b>	
<b>Studio</b>	<b>Risultato</b>
Stevenson e Bear (1970)	Le differenze prime del mais e dei semi di soia esibiscono autocorrelazione positiva.
Dusak (1973)	Le differenze prime del mais, del frumento e dei semi di soia presentano autocorrelazione positiva.
Taylor (1985)	Le differenze prime di otto beni agricoli e finanziari esibiscono autocorrelazione.
Taylor (1986)	Le differenze prime presentano autocorrelazione positiva.

Tabella 3: Futures e Volatilità sul Mercato Cash.

CONTRATTAZIONI SUI FUTURES E VOLATILITÀ NEL MERCATO CASH	
Studio	Risultato
Gray (1963)	Le contrattazioni in <i>futures</i> riducono la volatilità nel mercato delle cipolle.
Powers (1970)	I prezzi del bestiame e del maiale sono più stabili dopo l'introduzione dei <i>futures</i> .
Figlewski (1981)	L'introduzione delle contrattazioni in <i>futures</i> ha causato un incremento della volatilità sugli ammortamenti.
Moriarty e Tosini (1985)	L'introduzione delle contrattazioni in <i>futures</i> non hanno incrementato la volatilità degli ammortamenti.
Bhattacharaya, Ramjee e Ramjee (1986)	L'introduzione delle contrattazioni in <i>futures</i> non hanno incrementato la volatilità degli ammortamenti.

Tabella 4: Ipotesi di Samuelson.

RISULTATI EMPIRICI SULL'IPOTESI DI SAMUELSON	
Studio	Risultato
Rutledge (1976)	Rigetta l'ipotesi per il grano e l'olio di soia ma l'accetta per l'argento e la coca.
Castellino e Francis (1982)	Accetta l'ipotesi per il mais e i semi di soia.
Anderson (1985)	Supporta l'ipotesi, ma trova altri fattori più importanti che influiscono sulla volatilità
Milonas (1986)	Accetta l'ipotesi per 10 beni



## Capitolo 5

# APPLICAZIONE AL MERCATO DEI FUTURES

### 5.1 Introduzione

Il presente capitolo è dedicato all'applicazione dei modelli ARCH univariati e multivariati al Mercato Italiano dei Futures (MIF) e al London International Financial Futures Exchange (LIFFE). Nel paragrafo 5.2 descriveremo i dati utilizzati, mentre nel paragrafo 5.3 verrà svolta l'analisi univariata mediante modelli di tipo GARCH<sup>1</sup> dei prezzi *futures* del MIF e del LIFFE e dei corrispondenti prezzi *cash* del Mercato Secondario dei Titoli di Stato. Il paragrafo 5.4 è dedicato invece all'analisi bivariata<sup>2</sup> e alla stima dell'*hedge ratio* ottimo sia secondo la teoria tradizionale che secondo quella contenuta in Baillie e Myers (1989). Nel paragrafo 5.5 esporremo le conclusioni dell'applicazione.

---

<sup>1</sup>Il programma utilizzato per la stima è stato creato da Victor Ng della Università della California di San Diego.

<sup>2</sup>Il programma adattato per la stima bivariata è stato scritto da Ken Kroner.

## 5.2 Descrizione dei Dati

I dati sono costituiti dai prezzi *futures* giornalieri (chiusura) dal Lunedì al Venerdì, sia per il MIF che per il LIFFE. Essi sono stati ripresi dalla tabella relativa ai mercati *futures* contenuta nell'inserto Finanza & Mercati del Sole 24 ore.

I prezzi *futures* per il MIF riguardano i seguenti contratti:

- Contratto di Marzo 1993 (14 Settembre 1992 - 4 Marzo 1993)
- Contratto di Giugno 1993 (10 Novembre 1992 - 4 Giugno 1993).

I prezzi *futures* per il LIFFE riguardano i seguenti contratti

- Contratto di Marzo 1992 (19 Settembre 1991 - 4 Marzo 1992)
- Contratto di Giugno 1992 (20 Novembre 1992 - 2 Settembre 1992)
- Contratto di Settembre 1992 (20 Febbraio 1992 - 4 Settembre 1992)
- Contratto di Dicembre 1992 (26 Maggio 1992 - 2 Dicembre 1992).

I corrispondenti prezzi *cash* giornalieri concernenti i contratti sopracitati (sia per il LIFFE che per il MIF) sono stati tratti dalla tabella relativa al Mercato secondario dei Titoli di Stato contenuta nell'inserto Finanza & Mercati del Sole 24 ore. La tabella relativa al Mercato Secondario dei Titoli di Stato è divisa in tre sezioni

- BOT
- Certificati di Credito del Tesoro
- Buoni del Tesoro Poliennali (BTP).

Nella sezione relativa ai BTP sono riportate le quotazioni giornaliere dei

- BTP
- Certificati di Credito con Opzione (CTO).

Sia per il MIF che per il LIFFE abbiamo adottato come prezzo *cash* giornaliero del BTP la media aritmetica dei prezzi medi ponderati *cash* giornalieri delle ultime tre emissioni. Per le quotazioni mancanti ad entrambe le serie storiche (*cash* e *futures*), relative ad un determinato contratto, come ad esempio quella del 25 Dicembre, si è ommesso la quotazione, mentre per i dati mancanti ad una sola delle due serie si è sostituito tale dato con la media aritmetica tra il valore precedente e quello seguente. Alcune volte, per il MIF, si è sostituito il prezzo di chiusura, che per qualche inconveniente non era pervenuto in tempo alla redazione del SOLE 24 ore, con il prezzo precedente. Le serie originarie dei prezzi *cash* e *futures* sono riportate nelle figure da 1 a 12.

Comparando i grafici *cash* e *futures* corrispondenti ad un determinato contratto, si osserva per i contratti di Dicembre '92, Settembre '92 al LIFFE e per quello di Marzo '93 al MIF (vedi figure 5, 6, 7, 8, 11 e 12) la tendenza ad una base<sup>3</sup> positiva: questo sta ad indicare che l'offerta di BTP, per quei periodi, soddisfa la domanda presente e anticipata [Fink e Feduiak (1988)]. Per il contratto di Marzo '92 al LIFFE si evidenzia una base negativa (vedi figure 1 e 2), indice generalmente di una forte domanda di consegna immediata dei titoli, mentre dalle figure 3, 4, 9 e 10 relative ai contratti di Giugno '92 al LIFFE e Giugno '93 al MIF non emerge alcuna tendenza ad una base positiva o negativa.

L'adozione di una stessa scala ci permette di evidenziare alcune differenze significative tra i vari contratti. I grafici delle serie di Marzo '92 e Giugno '92 al LIFFE (vedi figure 1, 2, 3 e 4) non presentano particolari oscillazioni, infatti per entrambe le serie i valori sono compresi tra 96.45 e 99.54 con un campo di variazione di circa tre punti percentuali.

Le serie relative al contratto del Settembre '92 (vedi figure 5 e 6) mostrano un marcato trend discendente (il campo di variazione risulta infatti di circa otto punti percentuali) certamente dovuto agli eventi negativi che si sono verificati nella primavera-estate '92 (crisi economica, sviluppi dell'inchiesta sulle tangenti, attentati a magistrati).

Il picco che si osserva nelle figure 7, 8, 11 e 12 (contratto di Dicembre '92 e

---

<sup>3</sup>Per base si intende la differenza tra prezzi *cash* e *futures*.

Marzo '93) è da imputare all'uscita della lira italiana dal sistema monetario europeo (Settembre-Ottobre '92). I campi di variazione più elevati si sono registrati per i contratti in questione (circa 10-12 punti percentuali).

Ampie oscillazioni sono evidenti anche nella serie relativa al Marzo '93 e al Giugno '93 (vedi figure 9, 10, 11 e 12) con un palese trend ascendente associato ad un cambio ai vertici dell'esecutivo italiano.

## 5.3 Analisi Univariata

### 5.3.1 Processo Random Walk

I grafici delle differenze prime dei logaritmi delle serie dei prezzi *cash* e *futures* sembrano essere originati da processi sufficientemente stazionari in media e varianza (vedi le figure dalla 13 alla 24). Il modello più semplice coerente con questi andamenti è il *random walk*.

Come è noto le differenze prime dei logaritmi del modello *random walk* con *drift* possono essere espresse come

$$1000\Delta\log p_t = \eta + \varepsilon_t, \quad (64)$$

con

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2).$$

Le stime del modello 64 per i rendimenti dei prezzi *cash* e *futures* sono riportate nelle tabelle da 5 a 10. Il modello *random walk* con *drift* ed errori Gaussiani implica una successione delle differenze prime composta da variabili aleatorie normali indipendenti. Tuttavia si deve rilevare che il coefficiente di curtosi<sup>4</sup> e la statistica di Ljung-Box<sup>5</sup> calcolati per le serie dei rendimenti dei prezzi *cash* indicano un rifiuto

<sup>4</sup>Il coefficiente di curtosi (è zero se la distribuzione è normale), indicato con  $m_4$ , e il coefficiente di skewness, indicato con  $m_3$ , vengono calcolati sui residui standardizzati. Sotto l'ipotesi di normalità il coefficiente di curtosi e il coefficiente di skewness hanno distribuzione asintotica rispettivamente  $(T)^{1/2}m_3 \sim N(0, 6)$  e  $(T)^{1/2}m_4 \sim N(0, 24)$ .

<sup>5</sup>La statistica di Ljung-Box (Box-Pierce modificata) viene utilizzata per testare la presenza di autocorrelazione nelle serie temporali. Se il numero dei termini della serie temporale è elevato la

di tale modello. Infatti cinque delle sei serie dei rendimenti *cash* (tutte meno quella corrispondente al contratto *futures* di Marzo '92 al LIFFE) e tre serie su sei dei rendimenti *futures* indicano una presenza di autocorrelazione tra i residui standardizzati elevati al quadrato e una distribuzione condizionata simmetrica ma leptocurtica, come si rileva dalle tabelle 5-10. Effettuando infatti i test sul coefficiente curtosi e di skewness si osserva nella maggior parte delle serie dei residui standardizzati una significativa presenza di curtosi ma non di skewness (nelle varie tabelle le diciture Ljung-Box e Ljung-Box\* indicano rispettivamente la statistica di Ljung-Box di ordine 12 calcolata sui residui standardizzati e la statistica di Ljung-Box calcolata sui residui standardizzati elevati al quadrato).

Inoltre il test dei moltiplicatori di Lagrange [Engle (1982b)] fino all'ordine dieci sulle serie dei rendimenti *cash* e *futures* indica la presenza di eteroschedasticità condizionata<sup>6</sup>.

In considerazione di tutto questo rifiutiamo perciò il modello *random walk* come generatore delle serie dei prezzi *cash* e *futures* per orientarci verso processi ad eteroschedasticità condizionata.

### 5.3.2 Processo GARCH Univariato

Seguendo Baillie e Myers (1989), sia per le variazioni dei prezzi *cash* che *futures*, proponiamo di applicare il seguente modello

$$1000\Delta\log p_t = \eta + \varepsilon_t, \quad (65)$$

statistica

$$Q_m = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{T-k},$$

dove  $T$  è la numerosità campionaria e  $r_k^2$  è il coefficiente di autocorrelazione campionario di ordine  $k$ , ha distribuzione approssimata chi-quadro con un numero di gradi di libertà pari ad  $m$ . L'ipotesi nulla è  $\rho_k = 0$  per  $k \leq m$ , contro l'ipotesi alternativa  $\rho_k \neq 0$  per qualche  $k \leq m$ , dove  $\rho_k$  è il coefficiente di autocorrelazione teorico. Si rigetta l'ipotesi nulla se  $Q_m > \chi_\alpha^2(m)$ , dove  $\chi_\alpha^2(m)$  è il valore che lascia alla sua destra l' $\alpha$  per cento della area di una distribuzione chi-quadro con  $m$  gradi di libertà. Se l'ipotesi nulla è rigettata si conclude che la serie è autocorrelata, cioè che non è generata da un processo *white noise* [Farnum e Stanton (1989)].

<sup>6</sup>Per testare la presenza GARCH(p,q) è sufficiente testare la presenza ARCH(p+q). Per maggiori informazioni si veda Greene (1993) e Davison e Mac Kinnon (1993).

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

dove

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

I risultati della stima del modello 65 sotto l'ipotesi di GARCH(1,1) e di normalità condizionata per i rendimenti dei prezzi *cash* e *futures* sono riportati nelle tabelle da 11 a 16. Le stime di  $\alpha_1$  e di  $\beta_1$  risultano sempre positive e la loro somma sufficientemente vicina all'unità per tutte le dodici serie in esame.

Dall'analisi delle tabelle 11-16 si osserva che i coefficienti della varianza condizionata risultano sempre significativamente diversi da zero, inoltre le statistiche di Ljung-Box calcolate sui residui standardizzati e sui residui standardizzati elevati al quadrato non confermano la presenza di autocorrelazione. L'assunzione di normalità condizionata nel modello 65 comporta una distribuzione non condizionata leptocurtica [Engle (1982a) e Bollerslev (1986)]. Tuttavia nel nostro caso il coefficiente di curtosi della distribuzione condizionata dei residui standardizzati (indicato nelle tabelle con  $m_4$ ), risulta sempre ampiamente positivo (vedi dalla tabella 11 alla tabella 16). Alcuni autori perciò, seguendo Bollerslev (1987), per ovviare a questo inconveniente preferiscono utilizzare come distribuzione condizionata la t-student la quale, essendo più piatta della normale, fornisce risultati migliori [vedi Baillie e Myers (1989)].

## 5.4 Analisi Bivariata

Al fine di stimare l'*hedge ratio* ottimo verificheremo le due teorie proposte nel capitolo precedente. Diversi studi [ad esempio Anderson e Dantine (1981)] hanno assunto la matrice delle varianze e covarianze condizionata costante nel tempo. In questo caso l'*hedge ratio* ottimo è anche esso costante nel tempo e, come precedentemente accennato nel paragrafo 4.7.2, può essere ottenuto regredendo i rendimenti dei prezzi *cash* sui rendimenti dei prezzi *futures*.

Dalle elaborazioni effettuate risulta che tutti i coefficienti angolari, che rappresentano la stima dell'*hedge ratio* ottimo, eccetto quello relativo al contratto di Marzo '92

al LIFFE risultano significativamente diversi da zero. L'ipotesi alla base della dimostrazione 4.7.2 è che il valore atteso della variabile aleatoria  $\Delta F_t$  sia uguale a zero. Ciò è stato testato empiricamente verificando che la media sui rendimenti *futures* sia sufficientemente vicina allo zero (per un riscontro grafico si vedano anche le figure 13, 16, 18, 20, 22, 24.) Il modello che utilizzeremo per l'analisi bivariata è

$$1000\Delta \log y_t = \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

dove

$$y_t = \begin{pmatrix} F_t \\ S_t \end{pmatrix}$$

e

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*.$$

Come si può notare dai risultati nelle tabelle da 17 a 22 il modello ARCH(1) BEKK rappresenta in maniera opportuna il processo stocastico bivariato le cui componenti sono i rendimenti *cash* e *futures*. Tutti i coefficienti dei vari modelli risultano infatti significativamente diversi da zero.

L'*hedge ratio* è stimato in base alla formula

$$b_{t-1} = \frac{COV[\Delta S_t, \Delta F_t | \Psi_{t-1}^1, \Psi_{t-1}^2]}{VAR[\Delta F_t | \Psi_{t-1}^2]},$$

e nel nostro caso non risulta una realizzazione di un processo *random walk*. Infatti, come si nota dai dati riportati nelle tabelle da 23 a 28,  $\theta$  risulta sempre significativo.

Dall'analisi dei sei grafici [vedi da figura 25 a figura 30] le serie degli *hedge ratio* sembrano invece realizzazioni di un processo *white noise*, ciò è confermato dal test dei runs e di Wallis-Moore<sup>7</sup>.

Per valutare la bontà delle due strategie di *hedging* abbiamo analizzato la varianza condizionata del ritorno complessivo. La riduzione percentuale media della varianza condizionata del ritorno complessivo utilizzando un *hedge ratio* costante e ARCH rispetto a quello senza *hedging* è valutata in base alla formula

$$VAR(\Delta P_t | \Omega_{t-1}) = VAR(\Delta S_t | \Omega_{t-1}) + b_{t-1}^2 VAR(\Delta F_t | \Omega_{t-1}) - 2b_{t-1} COV(\Delta F_t, \Delta S_t | \Omega_{t-1}).$$

<sup>7</sup>Il test dei runs e di Wallis-Moore sono test *distribution free*.

Dalla tabella 29 si deduce che la varianza condizionata del ritorno complessivo si riduce quando si effettua *hedging* rispetto a quando non lo si effettua. Non si nota però una preponderanza dell'*hedge ratio* ottimo variante nel tempo rispetto a quello costante.



## 5.5 Conclusioni

Come si è visto, dalle analisi effettuate nella prima parte di questo capitolo, è risultato che le serie univariate dei prezzi *cash* e *futures* sembrano essere ben rappresentate da processi di tipo GARCH. Nella seconda parte dell'applicazione abbiamo analizzato poi due strategie di *hedging* ottime per il MIF e il LIFFE: la strategia basata su un *hedge ratio* costante e quella basata su un *hedge ratio* ARCH. Abbiamo stimato un modello ARCH(1) BEKK per quattro contratti al LIFFE e due al MIF. Questi modelli, come si è visto si adattano ai dati in modo soddisfacente; tuttavia le stime dell'*hedge ratio* ottimo, al contrario di quanto trovato da Baillie e Myers (1989) non sembrano la realizzazione di un processo *random walk* ma bensì di un processo *white noise*. La varianza condizionata del ritorno complessivo calcolata sia con l'*hedge ratio* ARCH che con quello costante pone in evidenza una prevalenza dell'attività di *hedging* rispetto al non effettuarla ma non una prevalenza di una teoria di *hedging* sull'altra.

La divergenza dei risultati da noi ottenuti rispetto a quelli ottenuti dai due studiosi americani è forse in parte dovuta alla diversità dei mercati europei e statunitensi e in parte all'oggetto del contratto.

Certamente ulteriori analisi empiriche sarebbero opportune per verificare questa diversità da noi rilevata tra l'attività di *hedging* in mercati statunitensi ed europei e tra contratti *futures* su beni e strumenti finanziari.

Tabella 5: Random walk (prezzi) Marzo '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH DEL CONTRATTO DI MARZO '92 AL LIFFE		
$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$		
Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.2390	0.1383
	(0.2215)	(0.1912)
$\hat{\sigma}^2$	0.1383	4.0546
	(0.1912)	(0.4026)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	0.4480	0.2634
$m_4$	8.4267	4.6634
<i>Ljung - Box</i> (12)	18.6304	8.7341
<i>Ljung - Box</i> (12)*	27.4851	9.7148

Tabella 6: Random walk (prezzi) Giugno '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH DEL CONTRATTO DI GIUGNO '92 AL LIFFE		
$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$		
Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.0910	0.0322
	(0.1842)	(0.1869)
$\hat{\sigma}^2$	4.3980	4.4964
	(0.2988)	(0.3399)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	0.4116	-0.4216
$m_4$	7.6877	6.4476
<i>Ljung - Box</i> (12)	13.9050	12.5158
<i>Ljung - Box</i> (12)*	14.5880	27.3180

Tabella 7: Random walk (prezzi) Settembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH  
DEL CONTRATTO DI SETTEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	-0.5873	-0.5070
	(0.4352)	(0.3755)
$\hat{\sigma}^2$	26.3211	19.3859
	(1.4624)	(1.3908)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	0.0677	0.2492
$m_4$	10.3350	6.6543
<i>Ljung - Box</i> (12)	26.6798	10.8853
<i>Ljung - Box</i> (12)*	22.1871	53.6606

Tabella 8: Random walk (prezzi) Dicembre '92 al LIFFE.

**STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH  
DEL CONTRATTO DI DICEMBRE '92 AL LIFFE**

$$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	-0.4490	-0.4332
	(0.6163)	(0.6779)
$\hat{\sigma}^2$	52.0394	60.4429
	(4.4910)	(4.7956)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	0.1676	0.4784
$m_4$	4.9266	5.8388
<i>Ljung - Box</i> (12)	9.1987	14.9054
<i>Ljung - Box</i> (12)*	19.7032	26.3139

Tabella 9: Random walk (prezzi) Marzo '93 al MIF.

STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH DEL CONTRATTO DI MARZO '93 AL MIF		
$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$		
Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.1354	0.3013
	(0.6404)	(0.5544)
$\hat{\sigma}^2$	45.6231	39.3154
	(3.7493)	(3.9760)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.5524	-0.5739
$m_4$	6.3343	4.4481
<i>Ljung - Box</i> (12)	28.9470	25.3352
<i>Ljung - Box</i> (12)*	43.0263	56.2140

Tabella 10: Random walk (prezzi) Giugno '93 al MIF.

STIMA DEL RANDOM WALK PER I PREZZI FUTURES E CASH DEL CONTRATTO DI GIUGNO '93 AL MIF		
$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$		
Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.3363	0.3853
	(0.4034)	(0.4523)
$\hat{\sigma}^2$	22.1341	28.5253
	(2.7525)	(2.0841)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.2465	-0.2356
$m_4$	2.9126	6.3790
<i>Ljung - Box</i> (12)	11.4258	5.4557
<i>Ljung - Box</i> (12)*	9.6514	24.5274

Tabella 11: GARCH(1,1) Marzo '93 al MIF.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES e CASH  
DEL CONTRATTO DI MARZO '93 AL MIF

$$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.2203 (0.5601)	0.2766 (0.4943)
$\hat{\alpha}_0$	2.7747 (1.7983)	2.1474 (1.7531)
$\hat{\alpha}_1$	0.7800 (0.1024)	0.8121 (0.1166)
$\hat{\beta}_1$	0.1304 (0.6111)	0.1077 (0.0768)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.8613	-0.5874
$m_4$	4.6166	3.4264
<i>Ljung - Box</i> (12)	14.7266	19.4789
<i>Ljung - Box</i> (12)*	16.1092	10.1275



Tabella 12: GARCH(1,1) Giugno '93 al MIF.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES e CASH  
DEL CONTRATTO DI GIUGNO '93 AL MIF

$$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.4602	0.2935
	(0.2587)	(0.4612)
$\hat{\alpha}_0$	0.7130	34.5916
	(0.3507)	(10.4891)
$\hat{\alpha}_1$	0.8077	0.4955
	(0.0268)	(0.3850)
$\hat{\beta}_1$	0.0404	0.2346
	(0.0254)	(0.0656)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.2918	-0.6116
$m_4$	2.8980	5.1143
<i>Ljung - Box</i> (12)	11.3602	4.2513
<i>Ljung - Box</i> (12)*	11.5074	8.1124

Tabella 13: GARCH(1,1) Marzo '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES e CASH  
DEL CONTRATTO DI MARZO '92 AL LIFFE

$$1000\Delta\log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.1909	0.2092
	(0.1971)	(0.1089)
$\hat{\alpha}_0$	4.3409	-0.0036
	(0.7179)	(0.2839)
$\hat{\alpha}_1$	0.2430	0.8140
	(0.1129)	(0.0922)
$\hat{\beta}_1$	0.7707	0.0222
	(0.0783)	(0.0120)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.0028	0.1286
$m_4$	5.1418	4.1581
<i>Ljung - Box</i> (12)	15.8227	8.3999
<i>Ljung - Box</i> (12)*	7.7172	10.9731

Tabella 14: GARCH(1,1) Giugno '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES e CASH  
DEL CONTRATTO DI GIUGNO '92 AL LIFFE

$$1000\Delta\log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.1351 (1.7574)	0.0552 (0.1713)
$\hat{\alpha}_0$	0.5920 (0.3554)	0.4391 (0.2584)
$\hat{\alpha}_1$	0.7166 (0.1179)	0.6987 (0.1043)
$\hat{\beta}_1$	0.1497 (0.0769)	0.2037 (0.0650)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	0.4250	0.0424
$m_4$	6.7777	4.4007
<i>Ljung - Box</i> (12)	8.5403	5.9230
<i>Ljung - Box</i> (12)*	7.7616	12.2596

Tabella 15: GARCH(1,1) Settembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES E CASH  
DEL CONTRATTO DI SETTEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	0.0328	0.0466
	(0.2402)	(0.2910)
$\hat{\alpha}_0$	0.2820	1.1660
	(0.1541)	(0.3752)
$\hat{\alpha}_1$	0.7420	0.6307
	(0.0430)	(0.0717)
$\hat{\beta}_1$	0.3629	0.3716
	(0.0698)	(0.0958)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.0225	- 0.7793
$m_4$	6.6610	6.0102
<i>Ljung - Box</i> (12)	14.7857	6.0687
<i>Ljung - Box</i> (12)*	3.8456	8.7648

Tabella 16: GARCH(1,1) Dicembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO GARCH(1,1) PER I PREZZI FUTURES E CASH  
DEL CONTRATTO DI DICEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta\log p_t = \eta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Coefficienti	FUTURES	CASH
$\hat{\eta}$	-0.6561	-0.0643
	(0.4938)	(0.5424)
$\hat{\alpha}_0$	10.4414	17.0630
	(4.3639)	(7.2642)
$\hat{\alpha}_1$	0.4721	0.2802
	(0.1132)	(0.1153)
$\hat{\beta}_1$	0.4163	0.5055
	(0.1049)	(0.2023)
Diagnostiche	FUTURES	CASH
$m_3$	-0.0265	0.9226
$m_4$	4.9274	6.4909
<i>Ljung - Box</i> (12)	5.0756	7.6594
<i>Ljung - Box</i> (12)*	11.1465	3.2921

Tabella 17: ARCH(1) BEKK Marzo '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI MARZO '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

---

$\hat{C}_{11}$	2.369
	(0.1945)
$\hat{C}_{12}$	1.4765
	(0.5378)
$\hat{C}_{22}$	2.3057
	(0.2887)
$\hat{A}_{11}$	0.4747
	(0.0448)
$\hat{A}_{12}$	-0.4626
	(0.0681)
$\hat{A}_{22}$	0.3690
	(0.0842)
Log-Verosimiglianza	-474.6030

Tabella 18: ARCH(1,1) BEKK Giugno '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI GIUGNO '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0' C_0^* + A_{11}' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

$\hat{C}_{11}$	2.0031
	(0.0837)
$\hat{C}_{12}$	1.0170
	(0.4136)
$\hat{C}_{22}$	2.0030
	(0.1454)
$\hat{A}_{11}$	0.4964
	(0.0903)
$\hat{A}_{12}$	-0.4977
	(0.0785)
$\hat{A}_{22}$	0.4980
	(0.0607)
Log-Verosimiglianza	-592.8443

Tabella 19: ARCH(1) BEKK Settembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI SETTEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta\log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

$\hat{C}_{11}$	4.2598
	(0.4031)
$\hat{C}_{12}$	1.7941
	(0.6820)
$\hat{C}_{22}$	13.5618
	(0.5801)
$\hat{A}_{11}$	-0.9542
	(0.0894)
$\hat{A}_{12}$	-0.3772
	(0.0956)
$\hat{A}_{22}$	-0.1741
	(0.0480)
Log-Verosimiglianza	-801.3373



Tabella 20: ARCH(1) BEKK Dicembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI DICEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta\log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0' C_0^* + A_{11}' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

---

$\hat{C}_{11}$	32.0342
	(2.1270)
$\hat{C}_{12}$	6.6125
	(3.8215)
$\hat{C}_{22}$	5.4232
	(0.2140)
$\hat{A}_{11}$	-0.0705
	(0.0232)
$\hat{A}_{12}$	1.0773
	(0.0602)
$\hat{A}_{22}$	-0.8212
	(0.0571)
Log-Verosimiglianza	-1039.1234

Tabella 21: ARCH(1) BEKK Marzo '93 al MIF.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI MARZO '93 AL MIF

$$1000\Delta\log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

$\hat{C}_{11}$	2.8187
	(0.0366)
$C_{12}$	1.5882
	(0.6525)
$C_{22}$	30.5529
	(2.6002)
$A_{11}$	-1.4444
	(0.0725)
$A_{12}$	-0.8393
	(0.1402)
$A_{22}$	-0.4013
	(0.0549)
Log-Verosimiglianza	-996.7548

Tabella 22: ARCH(1) BEKK Giugno '93 al MIF.

STIMA DEL PROCESSO ARCH(1) BEKK  
PER IL CONTRATTO DI GIUGNO '93 AL MIF

$$1000\Delta\log y_t = \varepsilon_t \quad y_t = (F_t, S_t)$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

$$H_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^*$$

Coefficienti

$\hat{C}_{11}$	10.7473
	(1.3133)
$\hat{C}_{12}$	5.1219
	(2.5982)
$\hat{C}_{22}$	11.7488
	(2.3282)
$\hat{A}_{11}$	-0.4899
	(0.1017)
$\hat{A}_{12}$	-0.4826
	(0.1047)
$\hat{A}_{22}$	-0.3305
	(0.0516)
Log-Verosimiglianza	-828.3995

Tabella 23: Random walk (hedge ratio) Marzo '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO RIFERITO AL CONTRATTO DI MARZO '92 AL LIFFE	
$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$	
Coefficienti	
$\hat{\eta}$	-1.9204 (2.9847)
$\hat{\theta}$	-0.8856 (0.0227)
$\hat{\sigma}^2$	73683.7241 (4633.2466)
Diagnostiche	
$m_3$	-1.0880
$m_4$	5.0081
<i>Ljung - Box</i> (12)	12.3893
<i>Ljung - Box</i> (12)*	53.8164

Tabella 24: Random walk (hedge ratio) Giugno '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO RIFERITO AL CONTRATTO DI GIUGNO '92 AL LIFFE	
$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$	
Coefficients	
$\hat{\eta}$	6.2077 (3.3719)
$\hat{\theta}$	-0.8949 (0.0206)
$\hat{\sigma}^2$	72096.7019 (3280.1828)
Diagnostiche	
$m_3$	-1.8375
$m_4$	8.4648
<i>Ljung - Box</i> (12)	8.0154
<i>Ljung - Box</i> (12)*	11.8057

Tabella 25: Random walk (hedge ratio) Settembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO  
RIFERITO AL CONTRATTO DI SETTEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

Coefficienti

---

$\hat{\eta}$	-13.8216
	(6.4465)
$\hat{\theta}$	-0.7427
	(0.0274)
$\hat{\sigma}^2$	64548.2695
	(3752.6109)

Diagnostiche

---

$m_3$	1.0753
$m_4$	4.4394
<i>Ljung - Box</i> (12)	16.1660
<i>Ljung - Box</i> (12)*	41.2370

Tabella 26: Random walk (hedge ratio) Dicembre '92 al LIFFE.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO  
RIFERITO AL CONTRATTO DI DICEMBRE '92 AL LIFFE

$$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

Coefficienti

---

$\hat{\eta}$	-0.2203
	(0.9782)
$\hat{\theta}$	-1.0185
	(0.0297)
$\hat{\sigma}^2$	25763.9555
	(1138.1674)

Diagnostiche

---

$m_3$	-4.0446
$m_4$	23.5504
<i>Ljung - Box</i> (12)	16.8875
<i>Ljung - Box</i> (12)*	26.2337

Tabella 27: Random walk (hedge ratio) Marzo '93 al MIF.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO  
RIFERITO AL CONTRATTO DI MARZO '93 AL MIF

$$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

Coefficienti

---

$\hat{\eta}$	0.3467
	(0.6106)
$\hat{\theta}$	-1.0156
	(0.0213)
$\hat{\sigma}^2$	79972.3380
	(3457.1622)

Diagnostiche

---

$m_3$	0.0641
$m_4$	8.5563
<i>Ljung - Box</i> (12)	23.3838
<i>Ljung - Box</i> (12)*	27.1406



Tabella 28: Random walk (hedge ratio) Giugno '93 al MIF.

STIMA DEL RANDOM WALK PER L'HEDGE RATIO OTTIMO RIFERITO AL CONTRATTO DI GIUGNO '93 AL MIF	
$1000\Delta \log b_t = \eta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ $\varepsilon_t   \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$	
Coefficients	
$\hat{\eta}$	-1.7022 (1.1774)
$\hat{\theta}$	-0.9519 (0.0231)
$\hat{\sigma}^2$	40081.9329 (4765.8730)
Diagnostiche	
$m_3$	0.6785
$m_4$	2.6113
<i>Ljung - Box</i> (12)	6.8610
<i>Ljung - Box</i> (12)*	3.9604

Tabella 29: Riduzione percentuale media della varianza condizionata.

RIDUZIONE PERCENTUALE MEDIA DELLA VARIANZA CONDIZIONATA DEL RITORNO COMPLESSIVO UTILIZZANDO HEDGE RATIO COSTANTE E ARCH RISPETTO A QUELLA SENZA HEDGING		
Contratti	Costante	ARCH
LIFFE MARZO '92	-5.9371	-25.9722
LIFFE GIUGNO '92	-10.1283	15.3415
LIFFE SETTEMBRE '92	-4.6123	-9.2123
LIFFE DICEMBRE '92	-7.2113	-3.4551
MIF MARZO '93	-38.2136	-19.6774
MIF GIUGNO '93	-1.5649	5.2145

PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
MARZO 1992 AL LIFFE

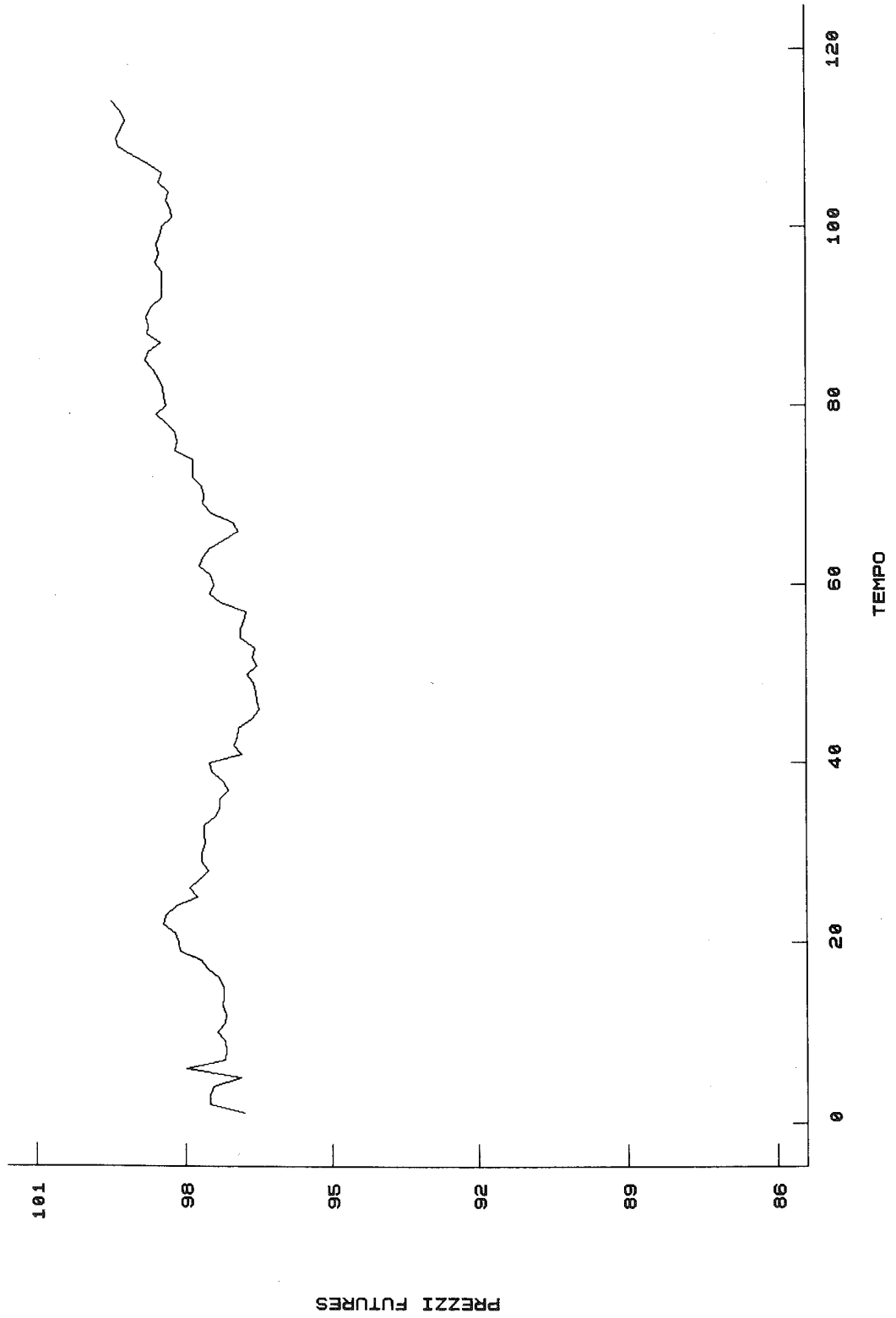


Figura 1

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO DI  
MARZO 1992 AL LIFFE

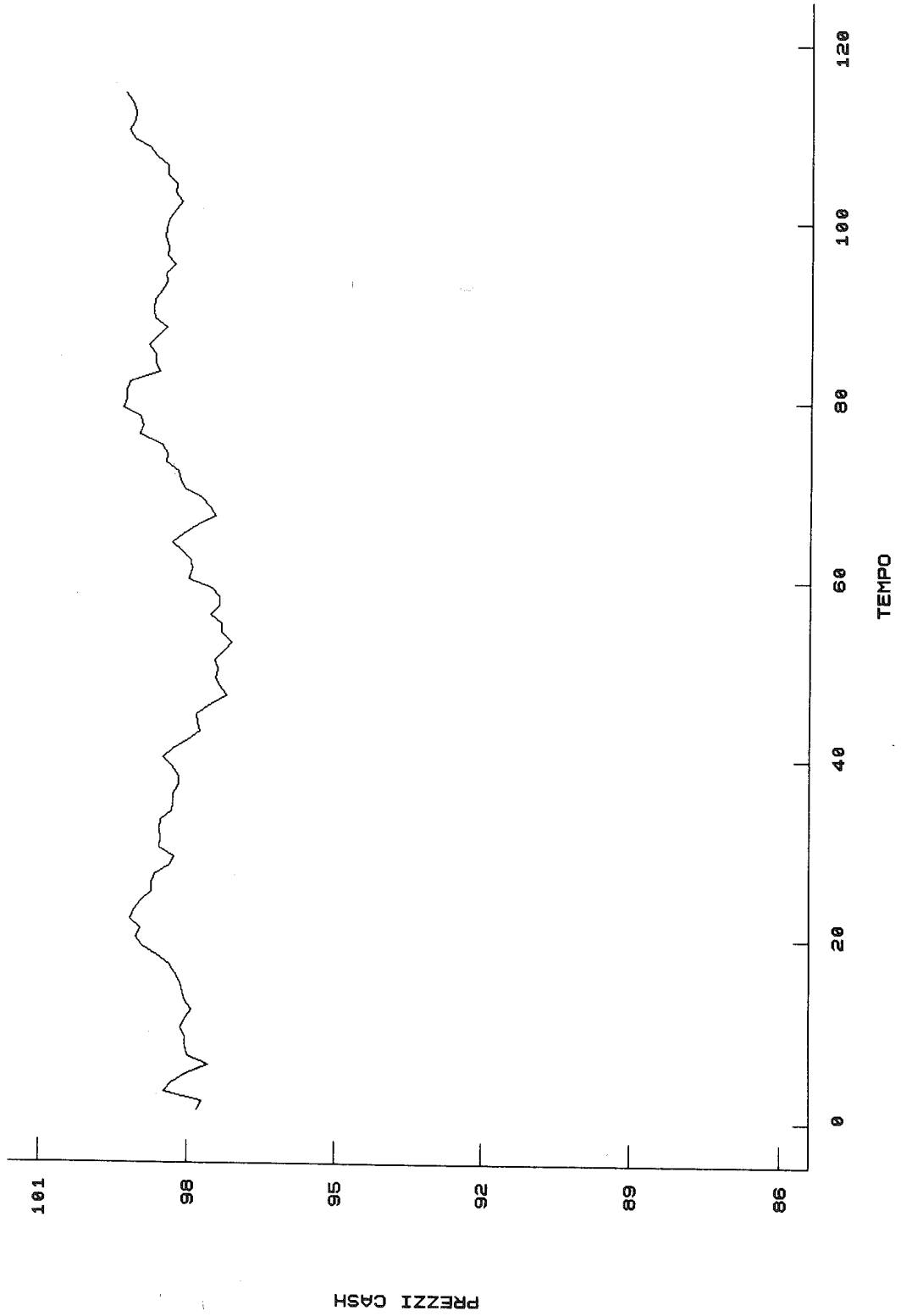


Figura 2

PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
GIUGNO 1992 AL LIFFE

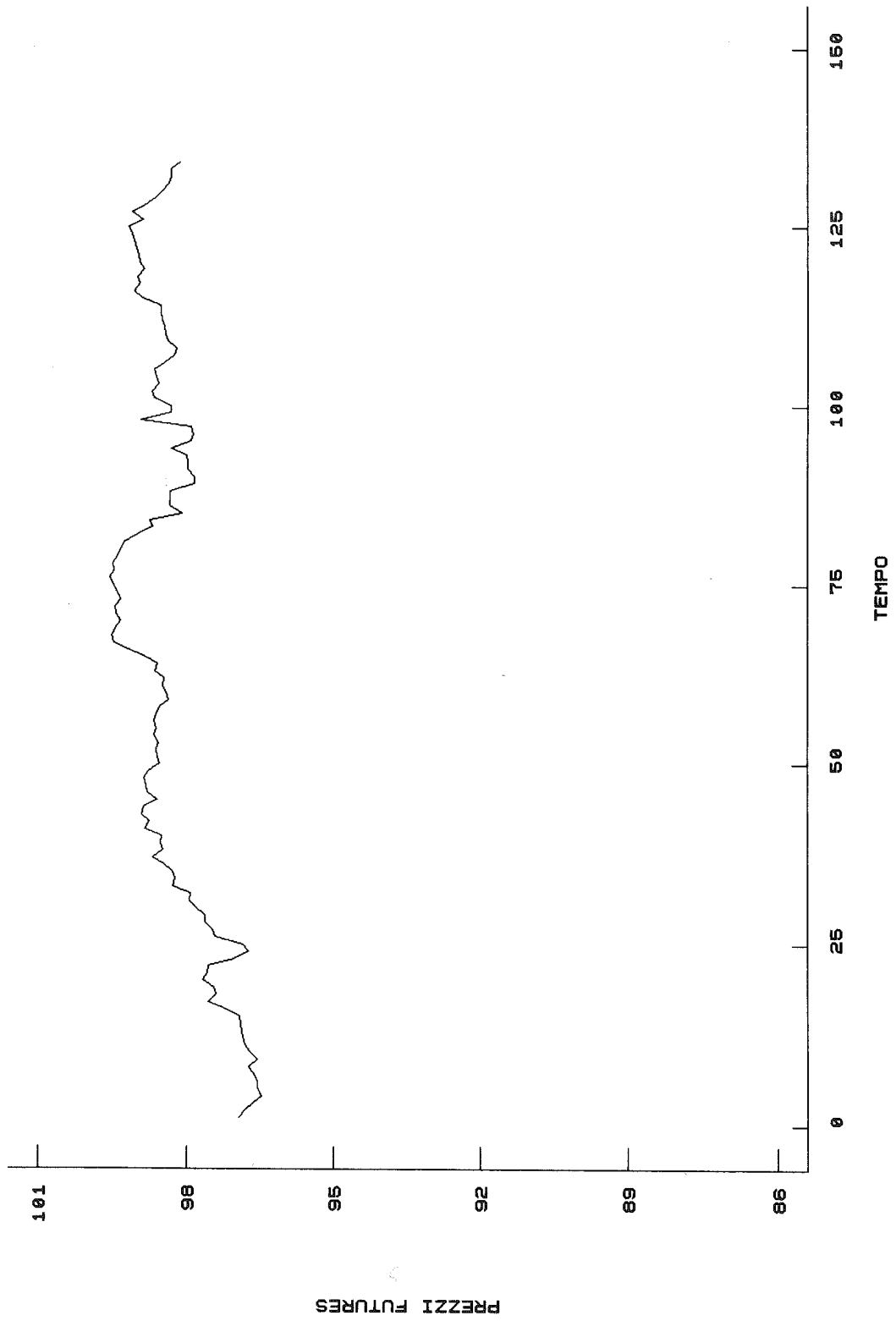


Figura 3

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO DI  
GIUGNO 1992 AL LIFFE

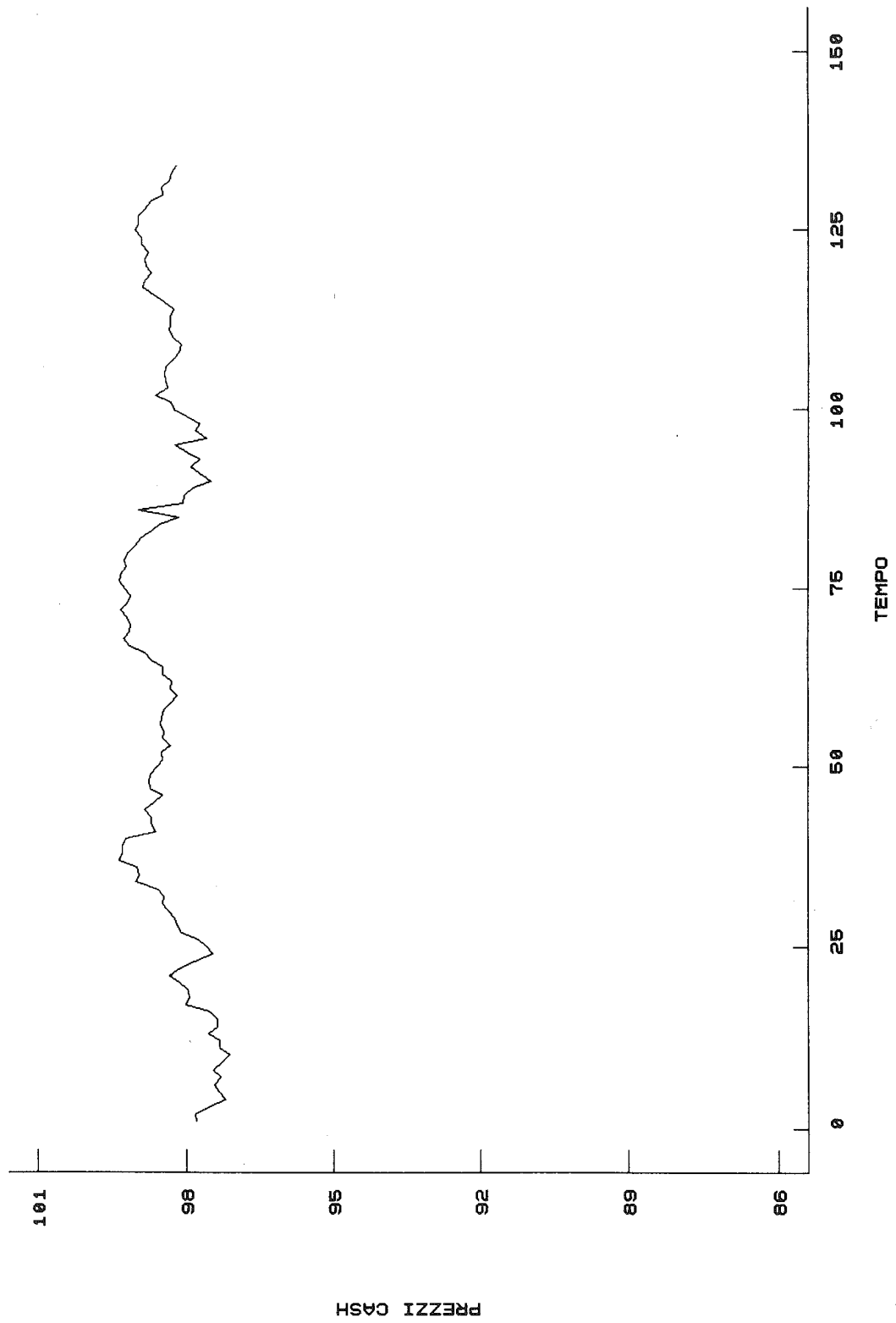


Figura 4

PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
SETTEMBRE 1992 AL LIFFE

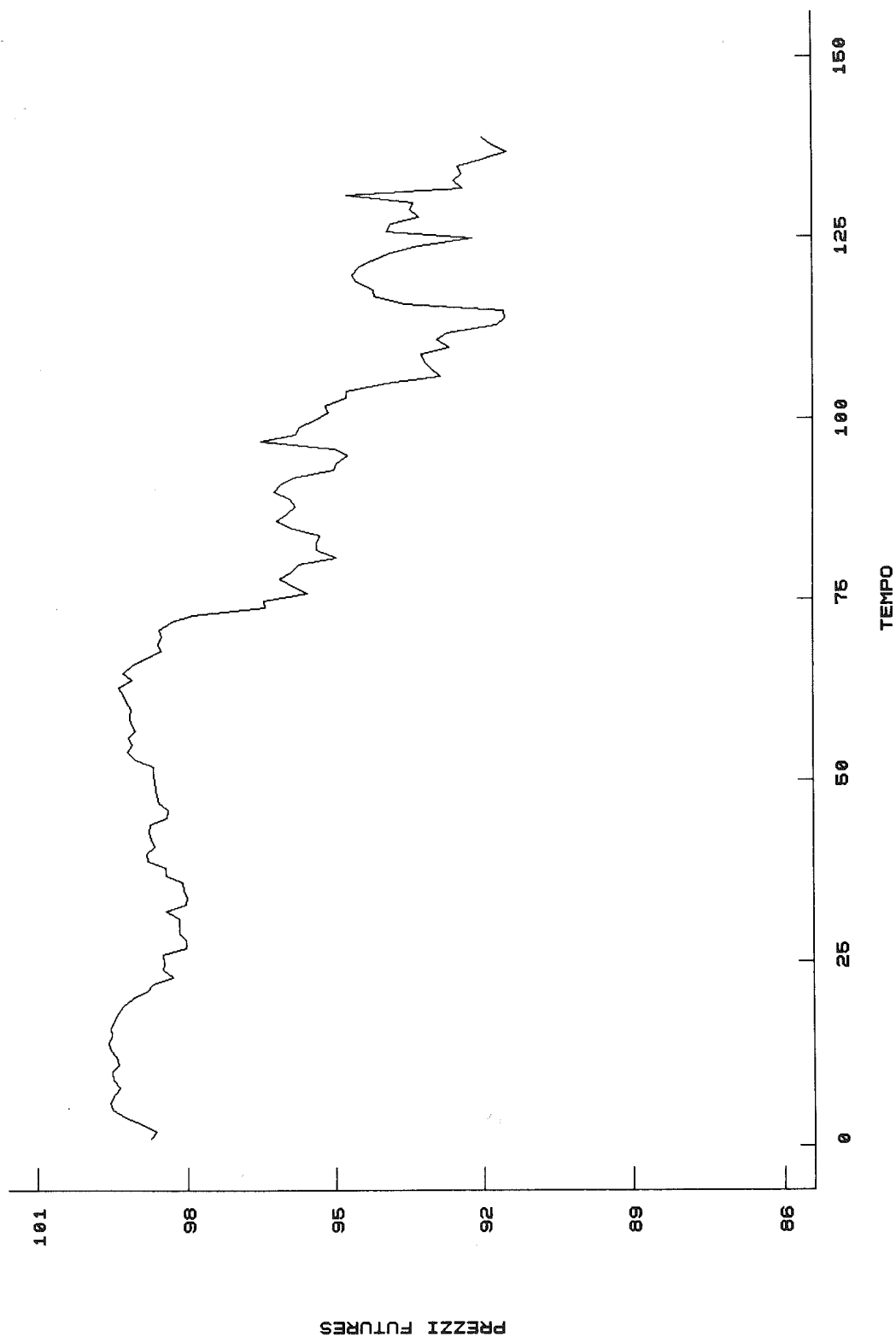


Figura 5

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO DI  
SETTEMBRE 1992 AL LIFFE

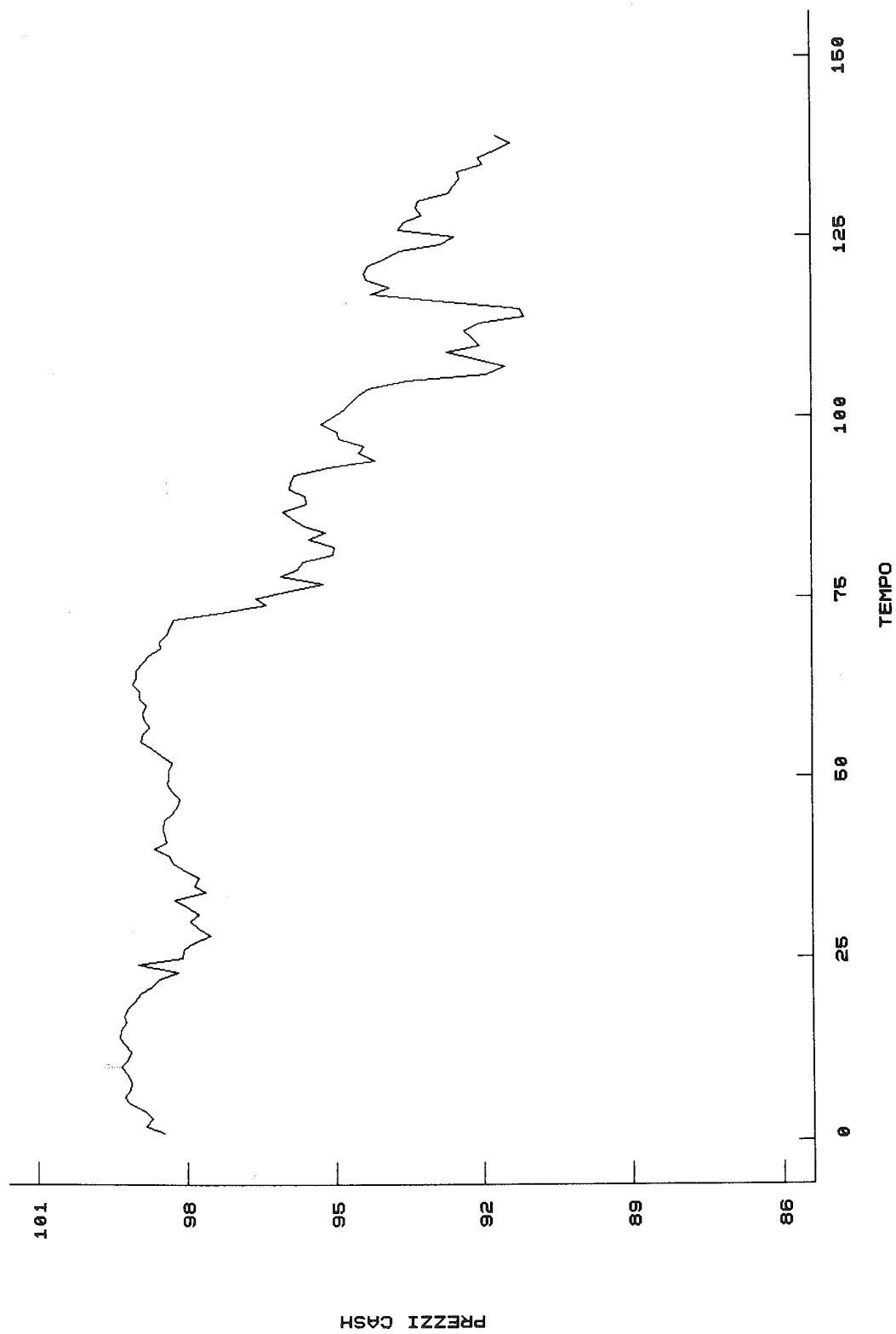


Figura 6



PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
DICEMBRE 1992 AL LIFFE

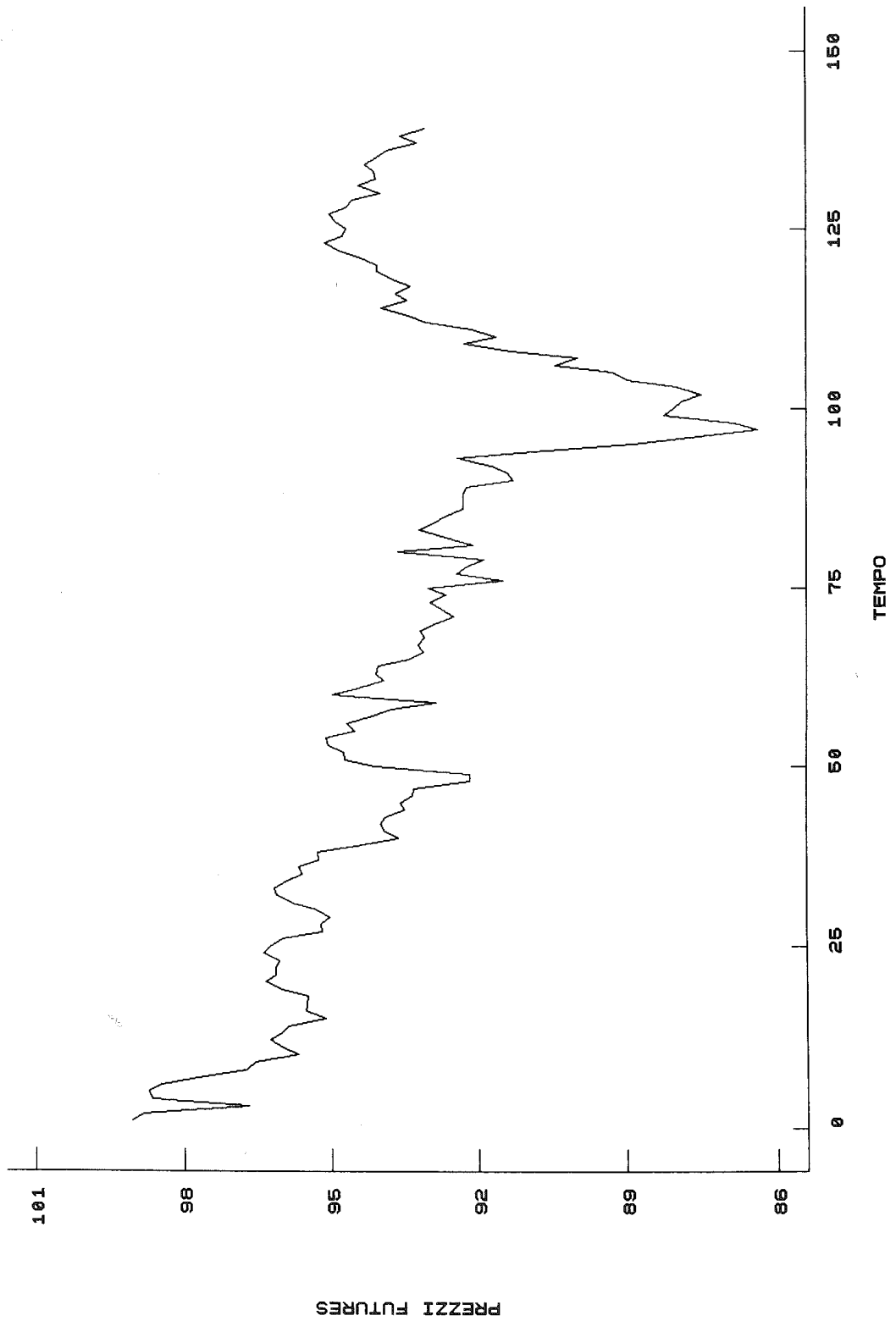


Figura 7

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO DI  
DICEMBRE 1992 AL LIFFE

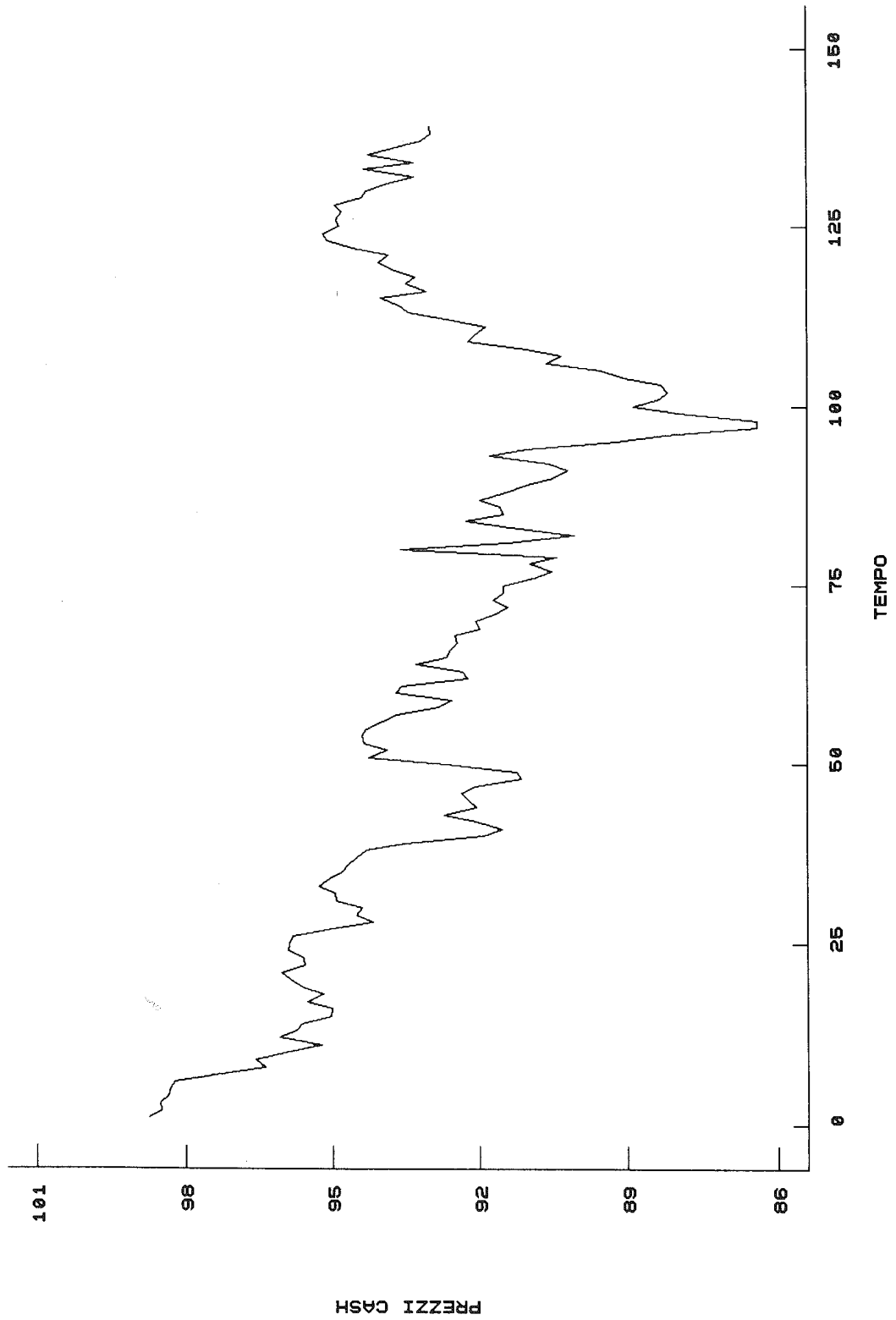


Figura 8

PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
GIUGNO 1993 AL MIF

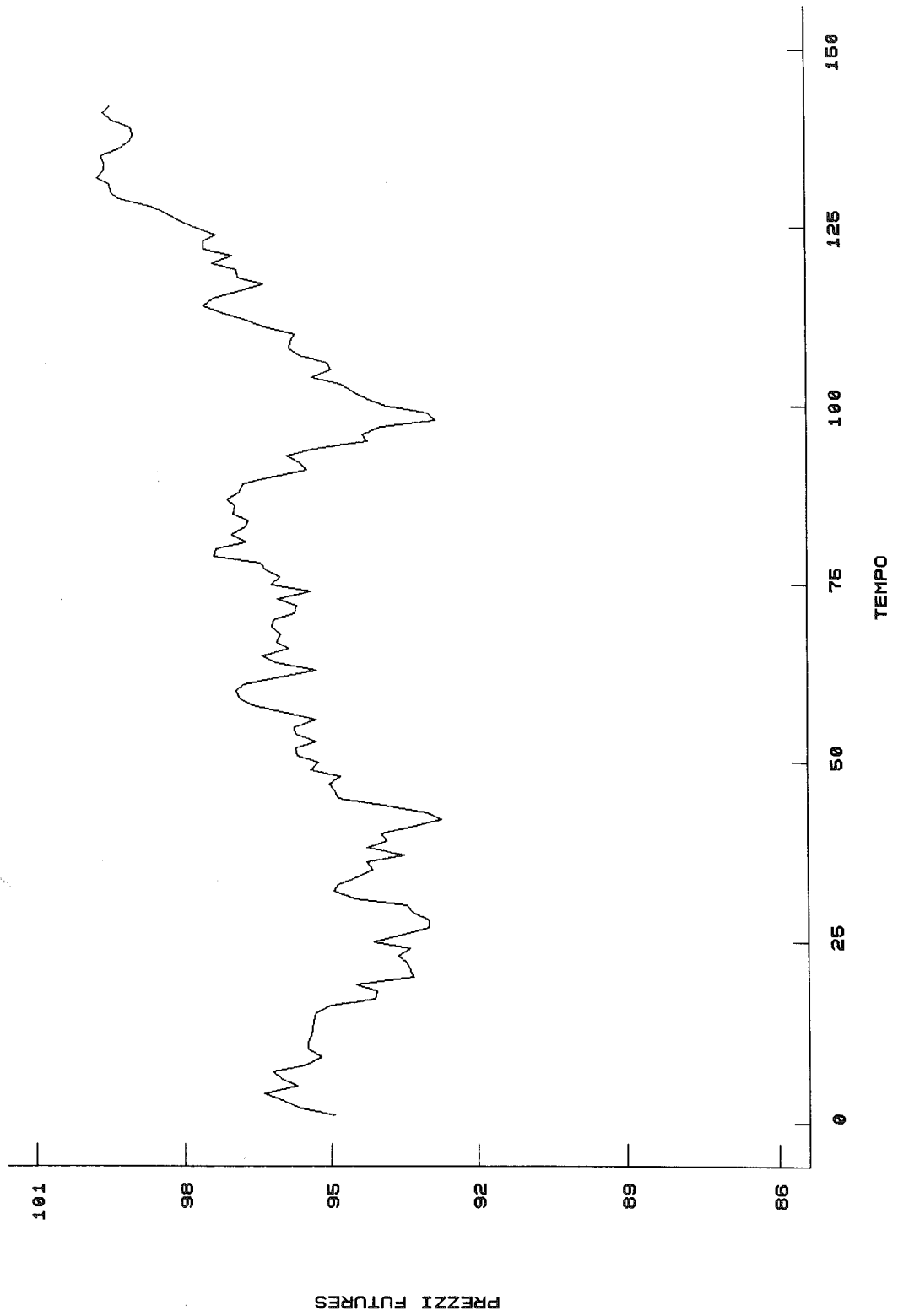


Figura 9

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO  
DI GIUGNO 1993 AL MIF

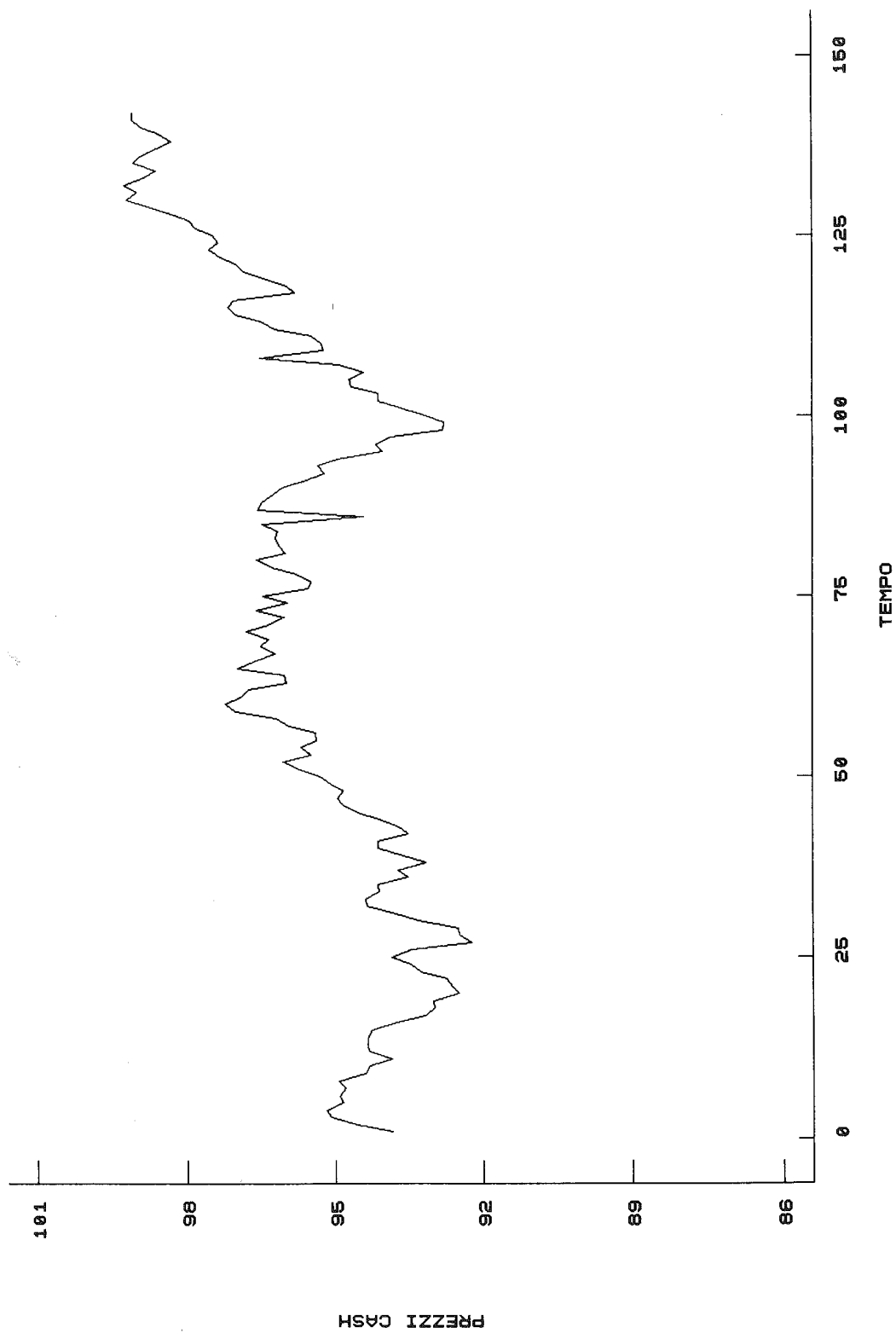


Figura 10

PREZZI FUTURES DEL CONTRATTO DI  
MARZO 1993 AL MIF

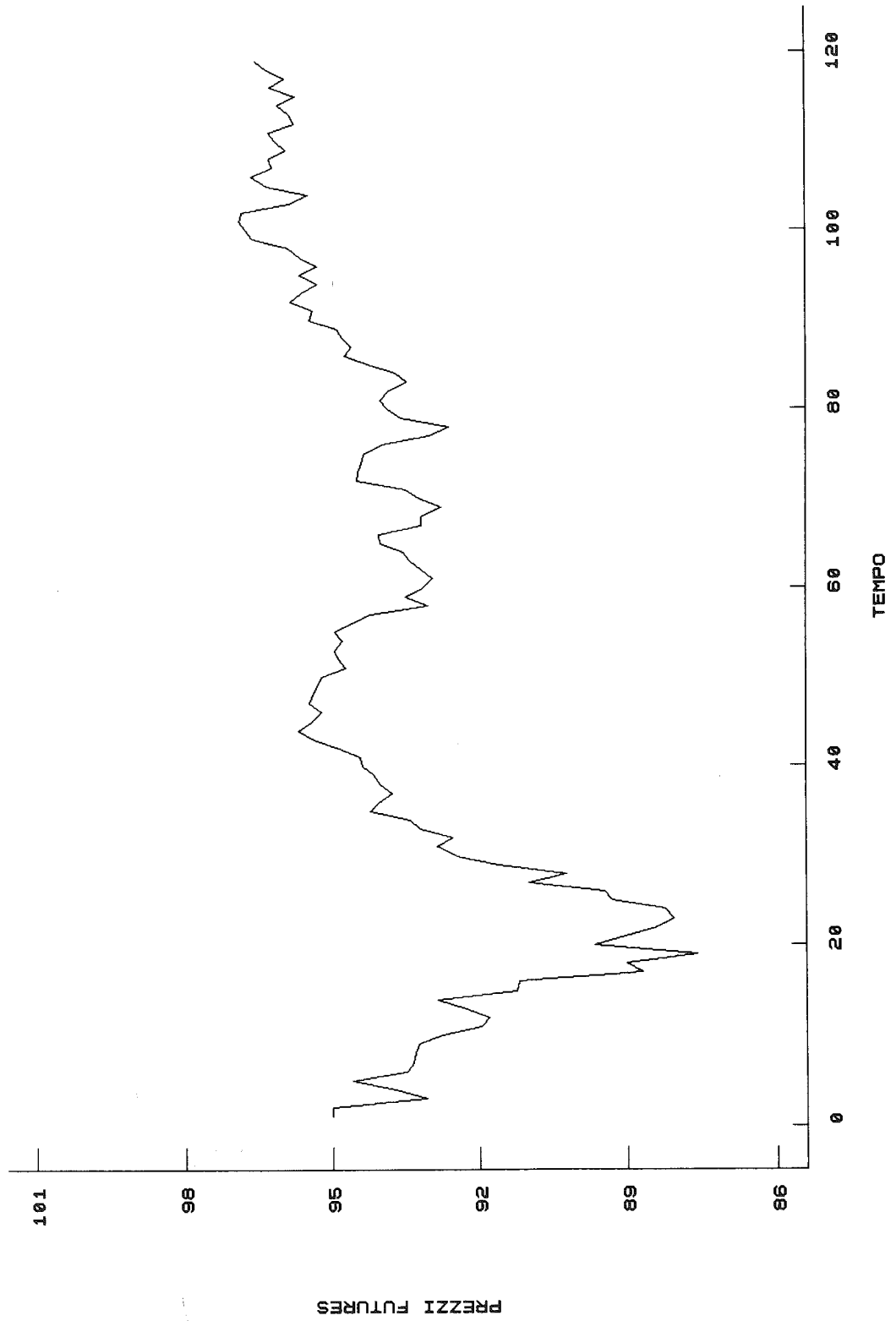


Figura 11

PREZZI CASH RELATIVI AL CONTRATTO  
DI MARZO 1993 AL MIF

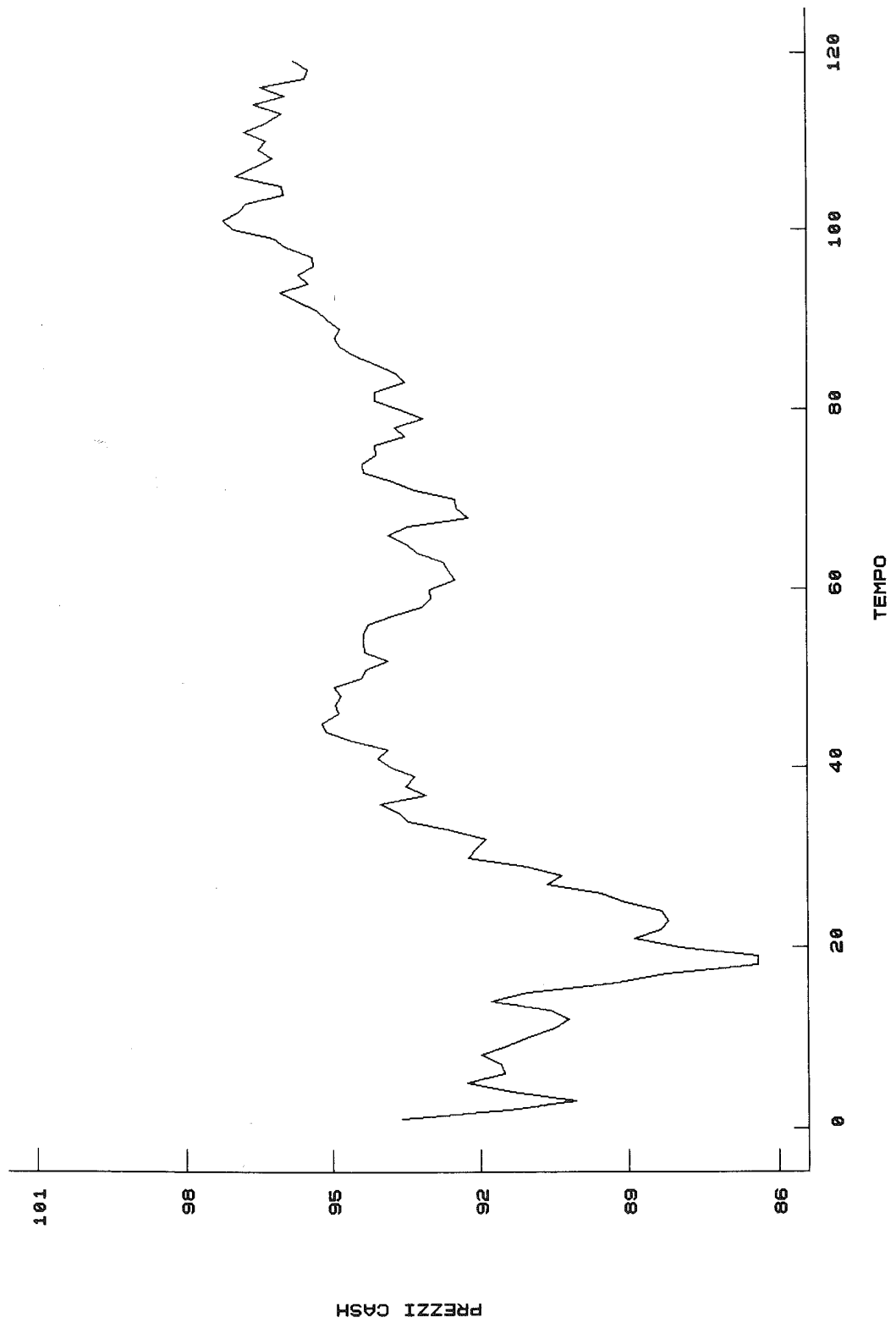


Figura 12

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI MARZO 1992 AL LIFFE

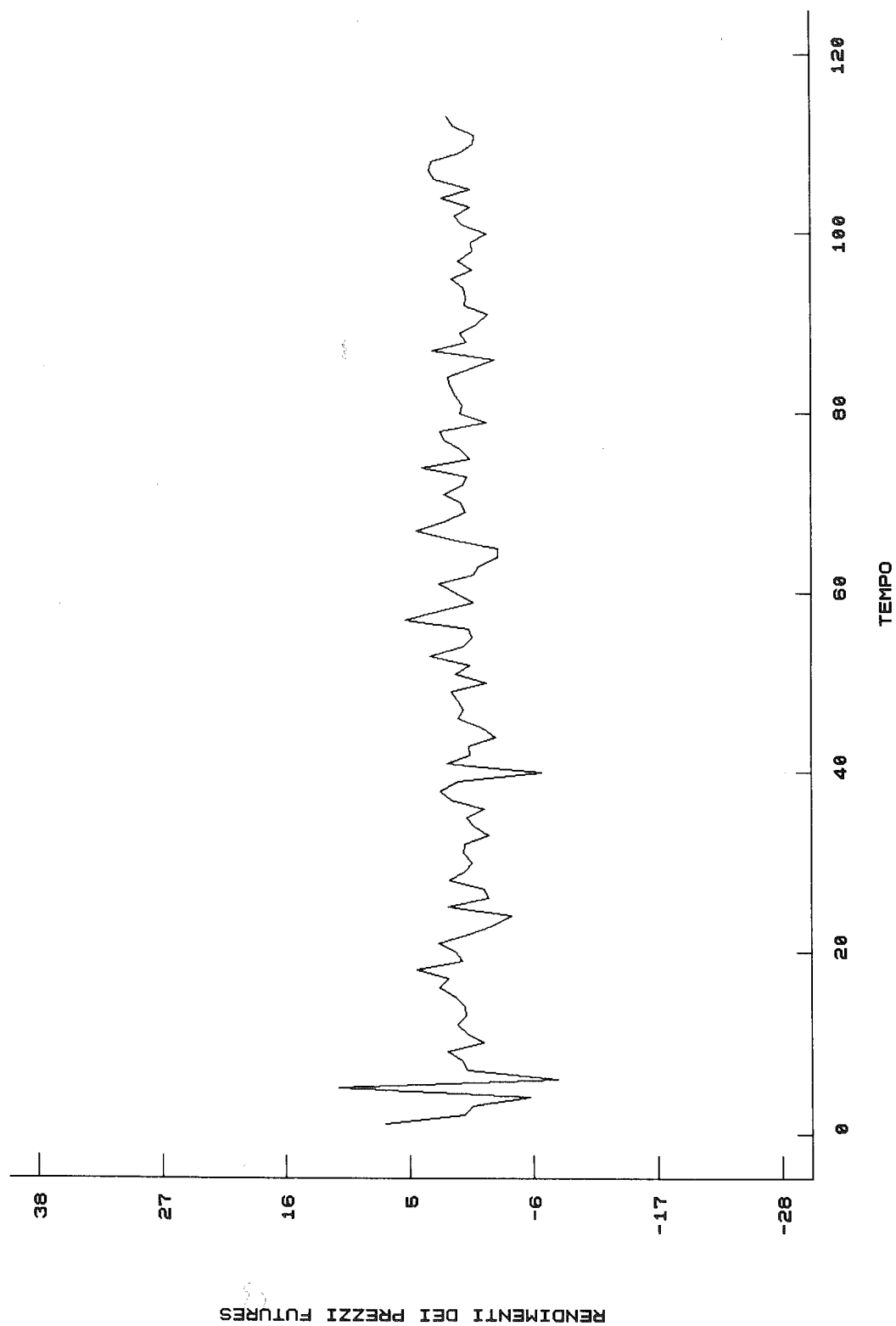


Figura 13

RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI GIUGNO 1993 AL MIF

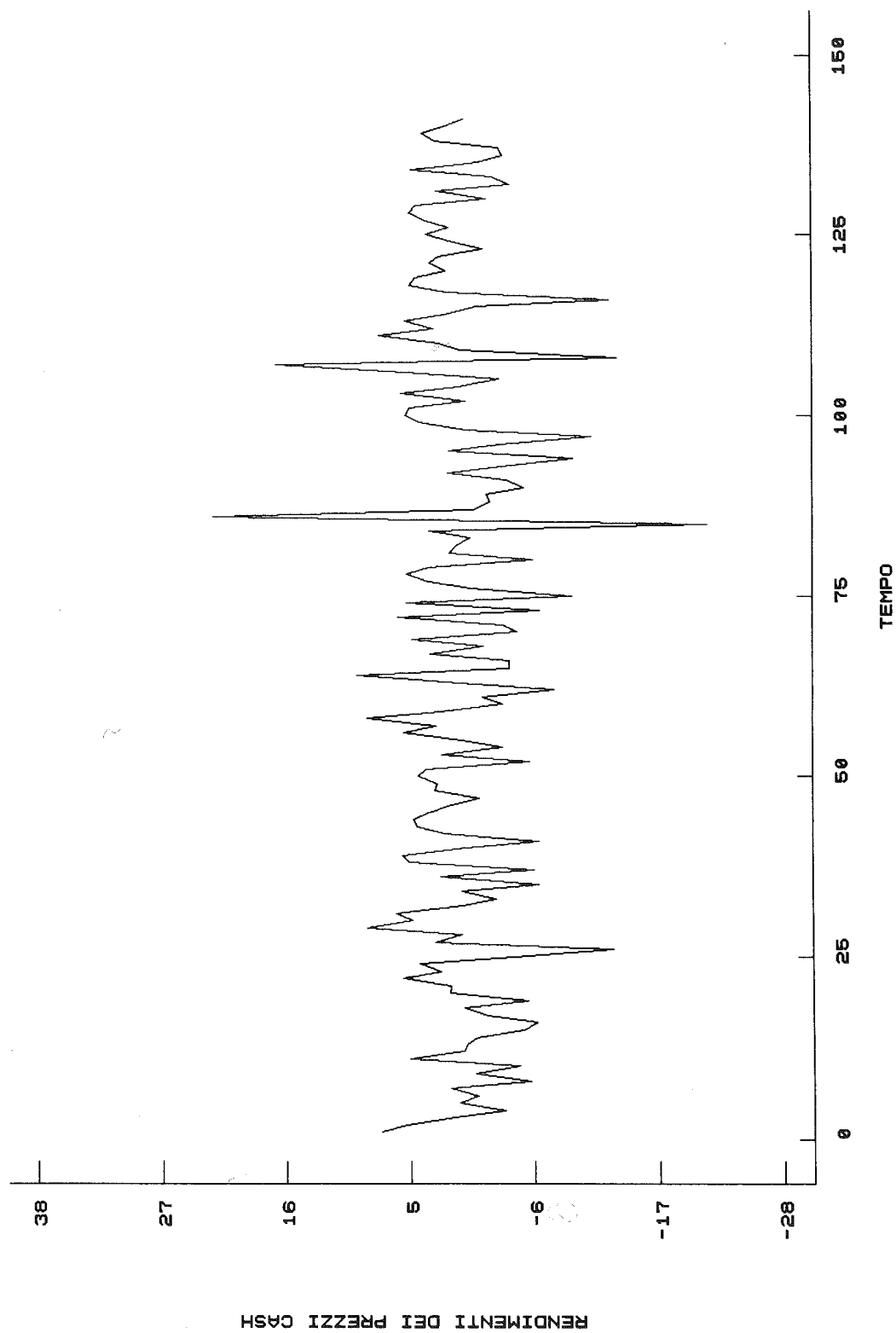


Figura 14



RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI MARZO 1992 AL LIFFE

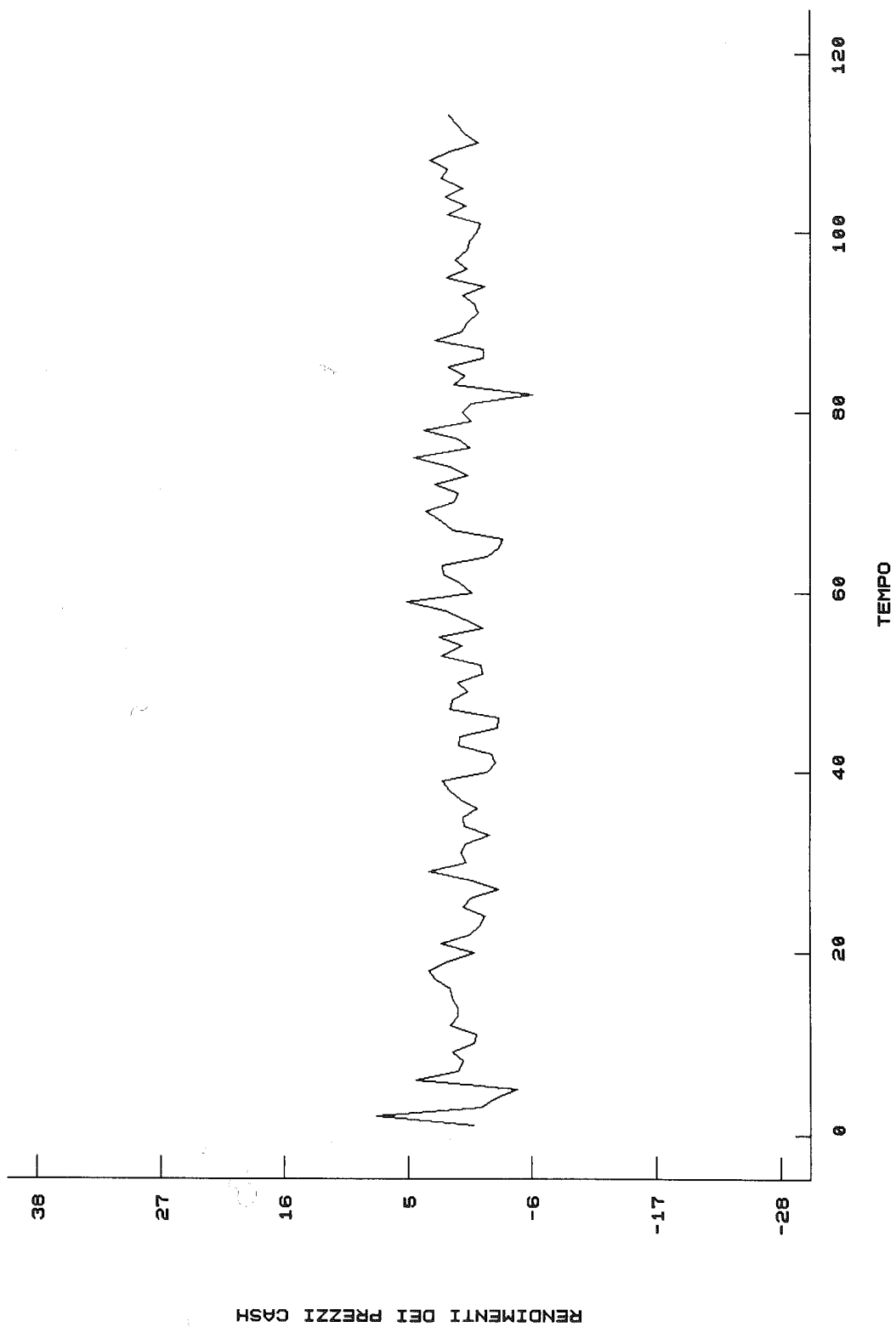


Figura 15

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI GIUGNO 1992 AL LIFFE

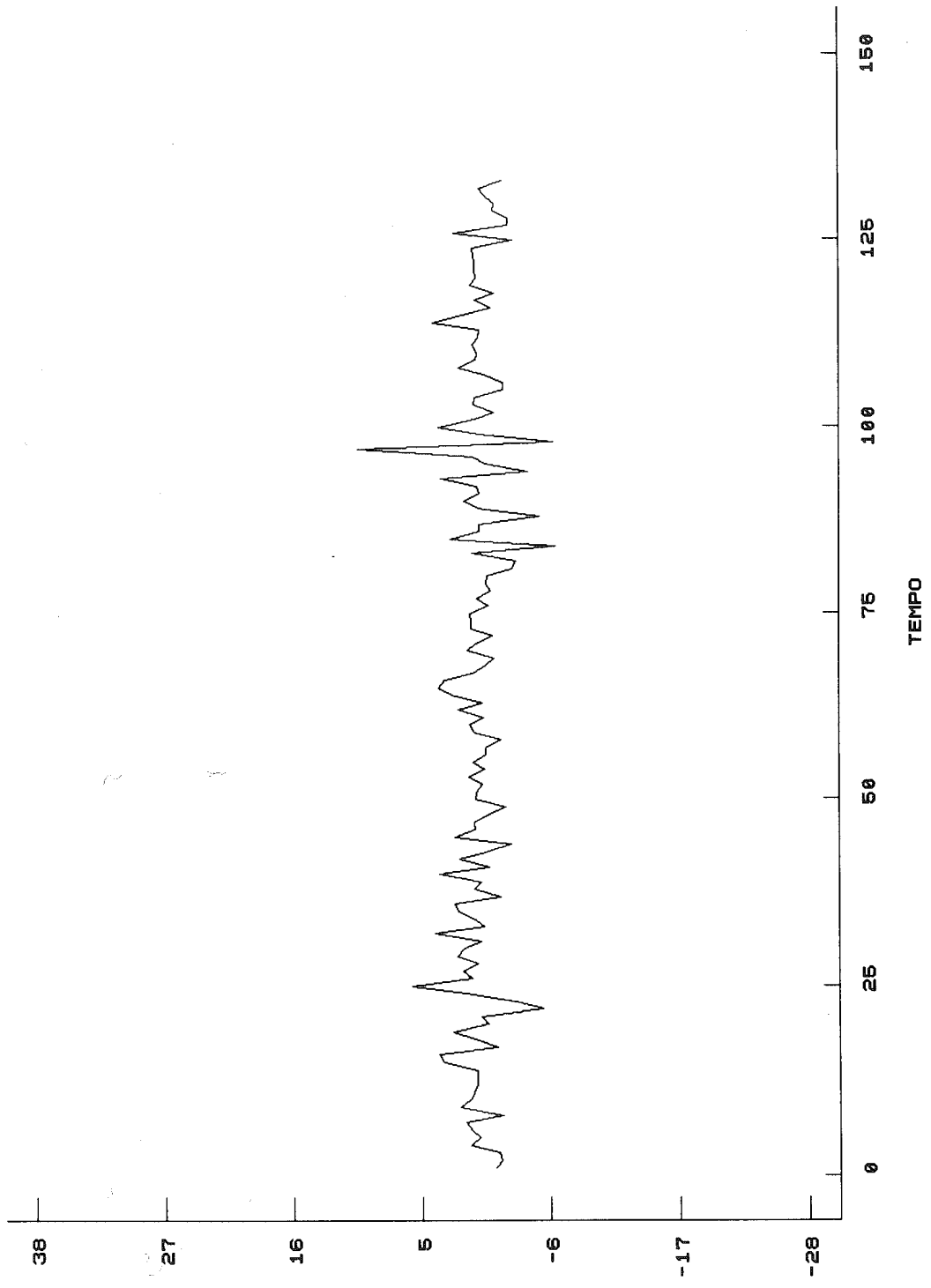


Figura 16

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES

RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI GIUGNO 1992 AL LIFFE

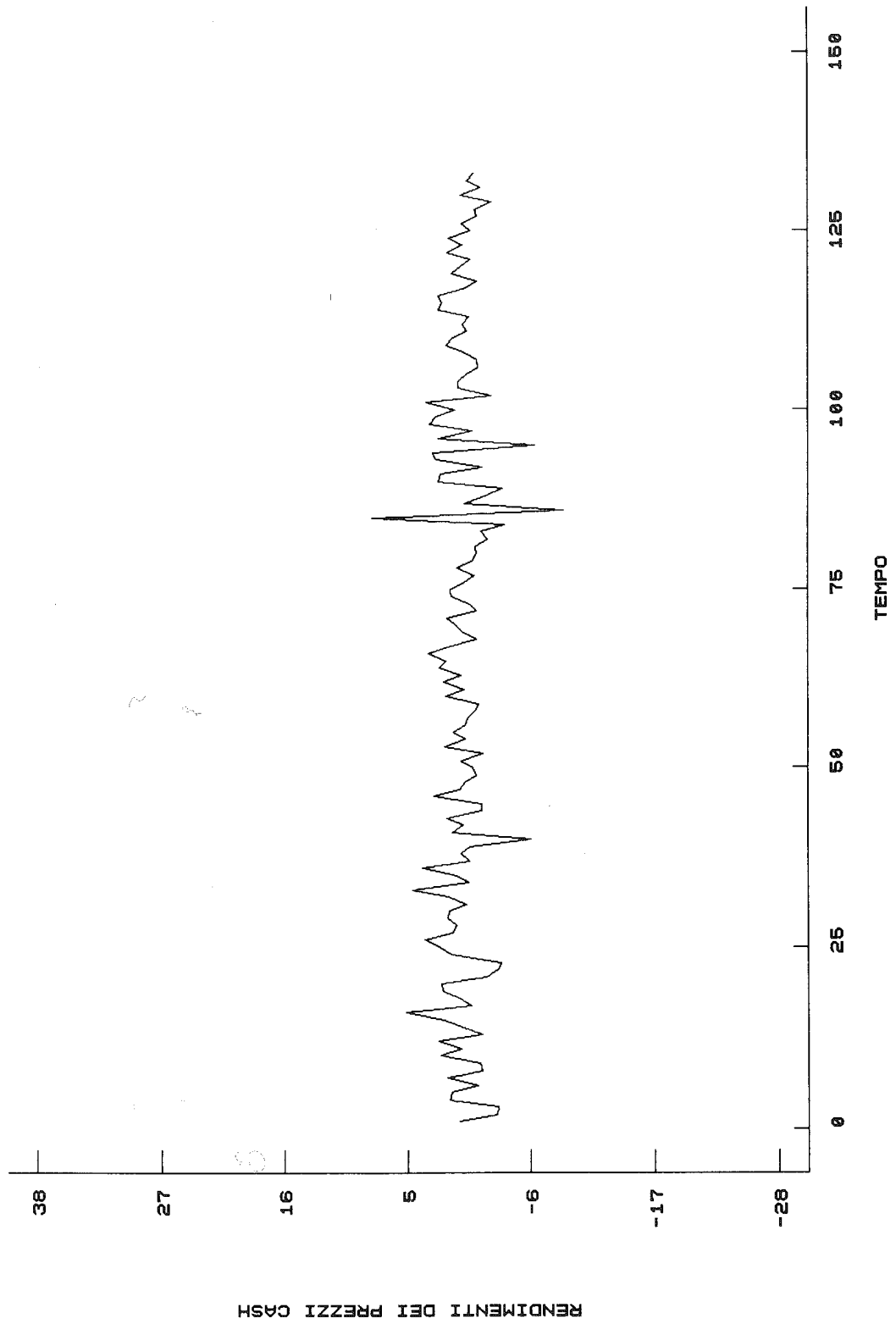


Figura 17

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI SETTEMBRE 1992 AL LIFFE

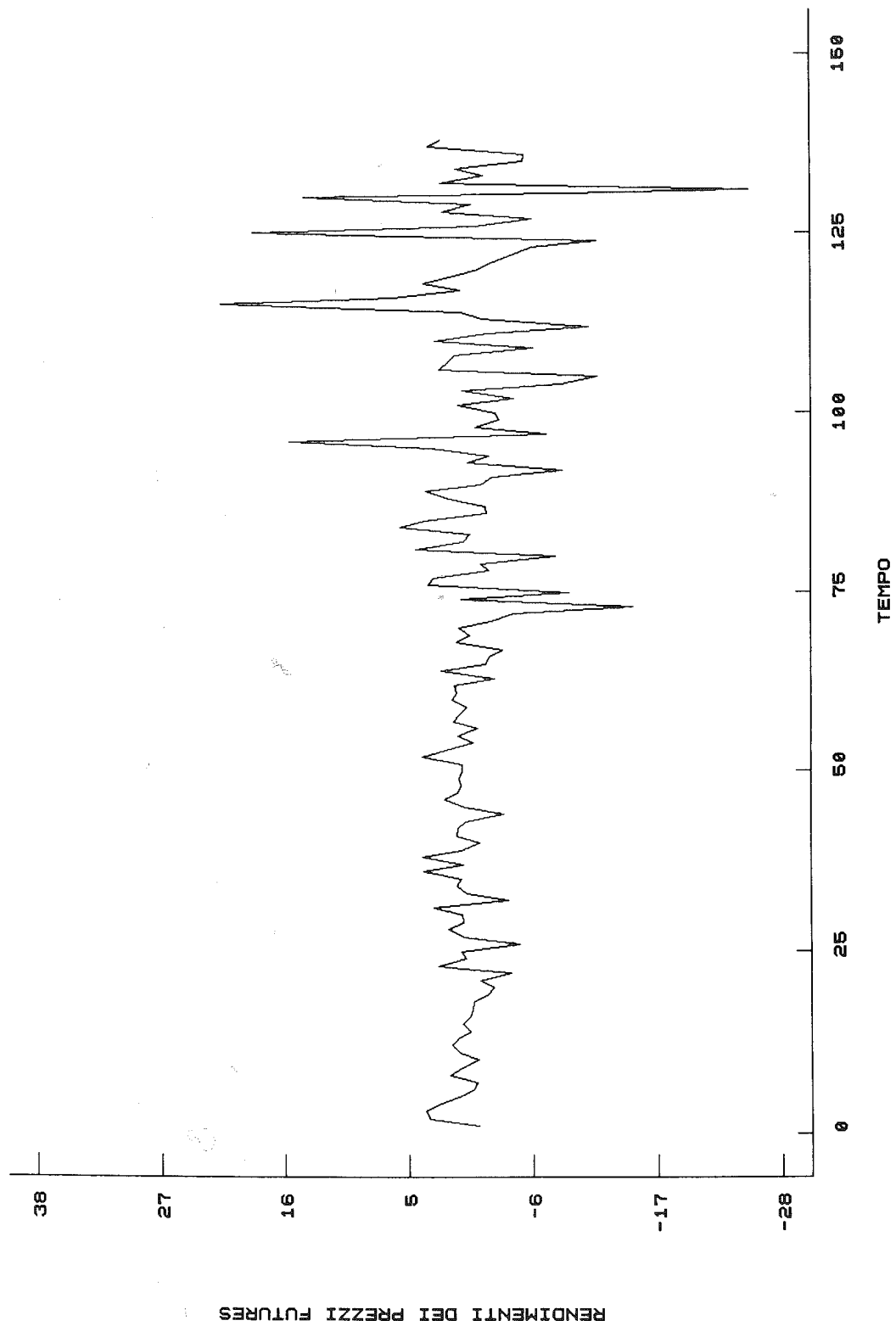


Figura 18

RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI SETTEMBRE 1992 AL LIFFE

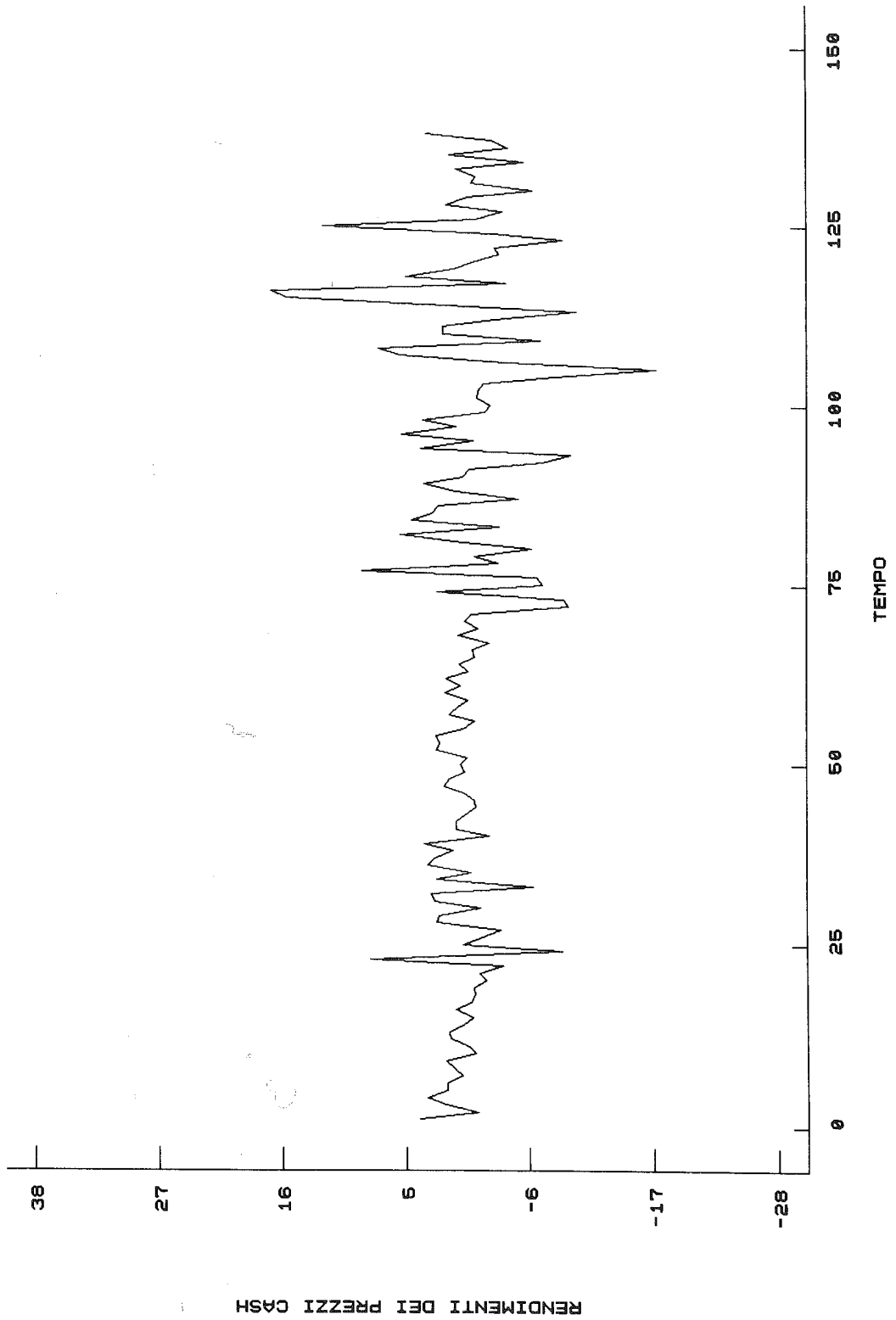


Figura 19

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI DICEMBRE 1992 AL LIFFE

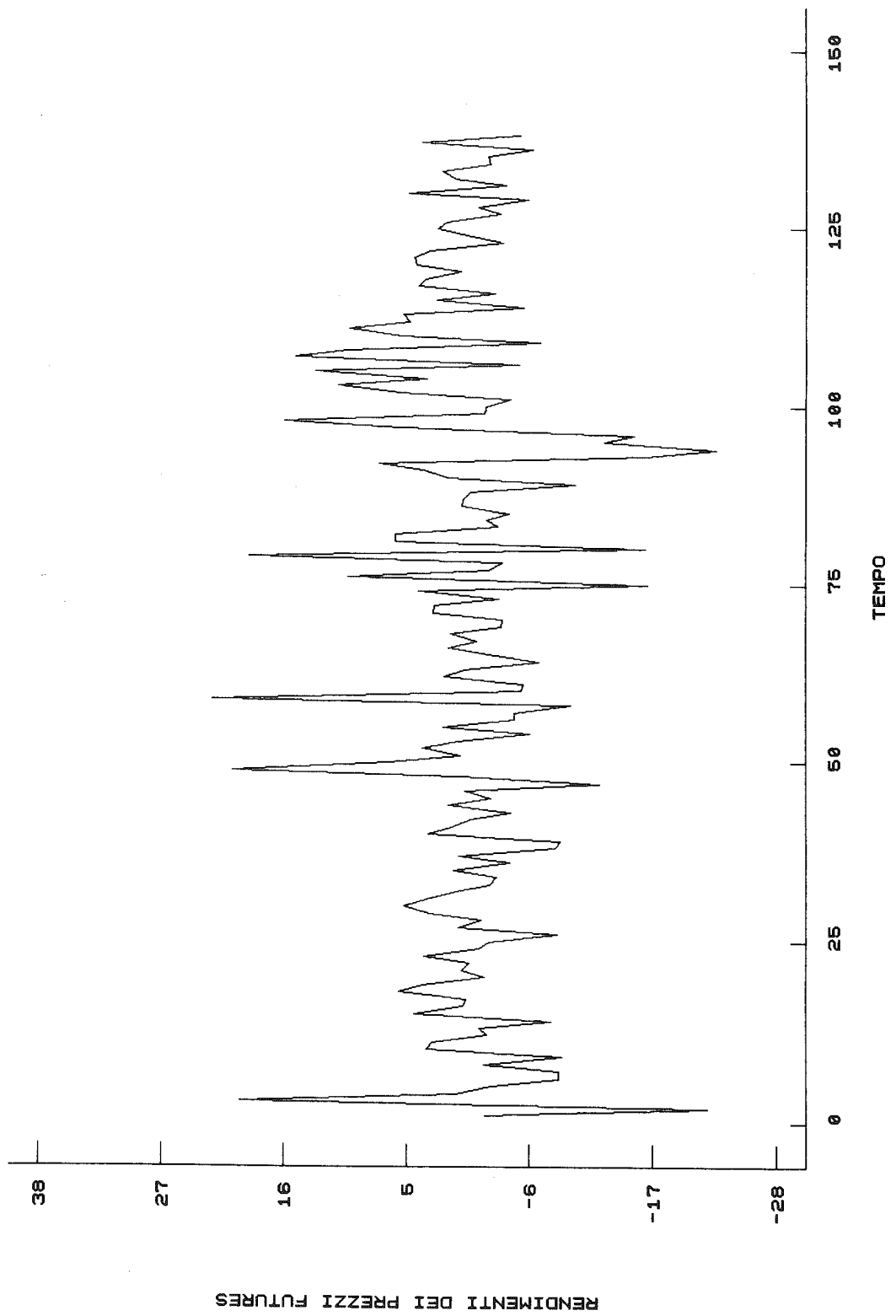


Figura 20

RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI DICEMBRE 1992 AL LIFFE

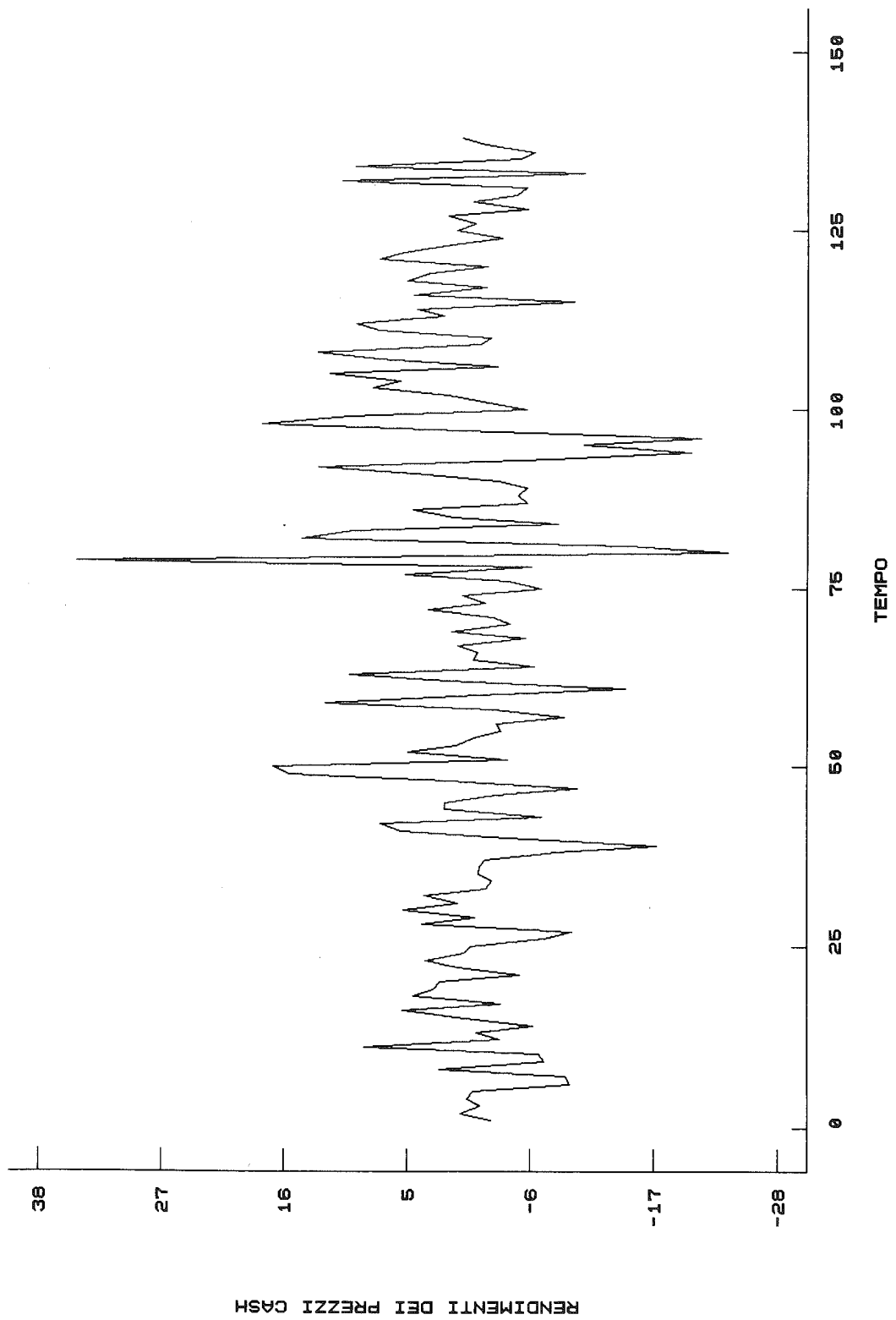


Figura 21

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI MARZO 1993 AL MIF

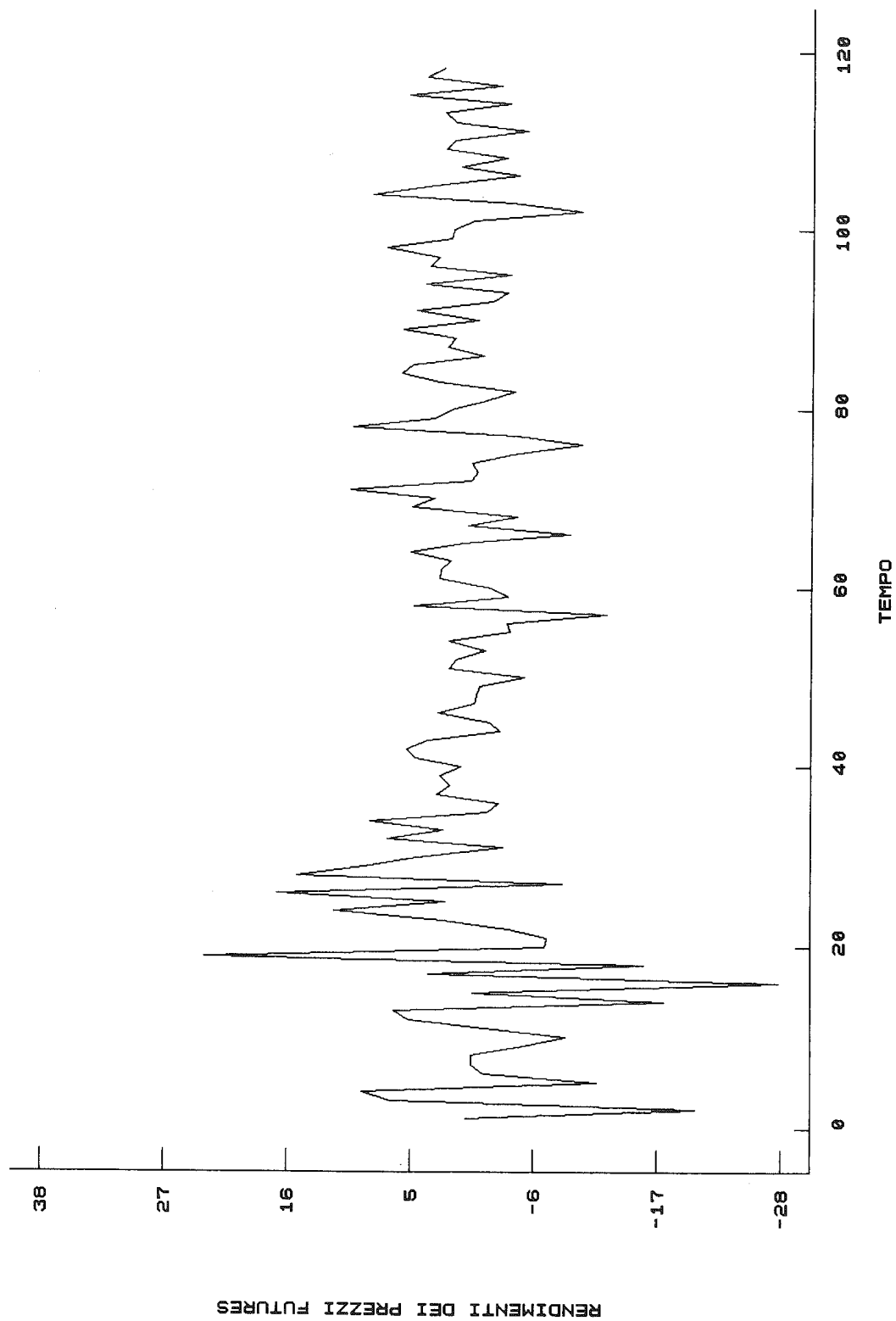


Figura 22



RENDIMENTI DEI PREZZI CASH RELATIVI  
AL CONTRATTO DI MARZO 1993 AL MIF

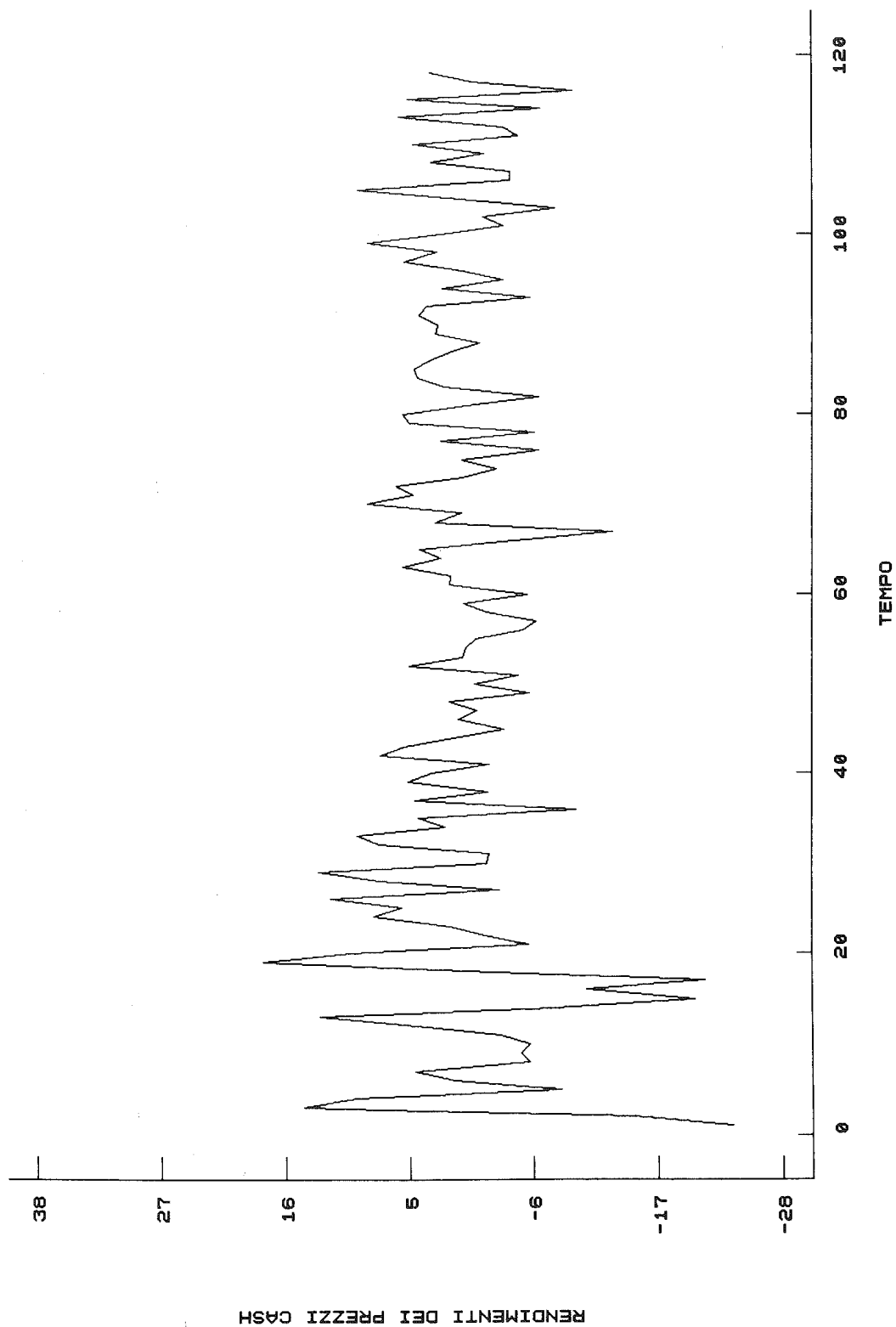


Figura 23

RENDIMENTI DEI PREZZI FUTURES  
DEL CONTRATTO DI GIUGNO 1993 AL MIF

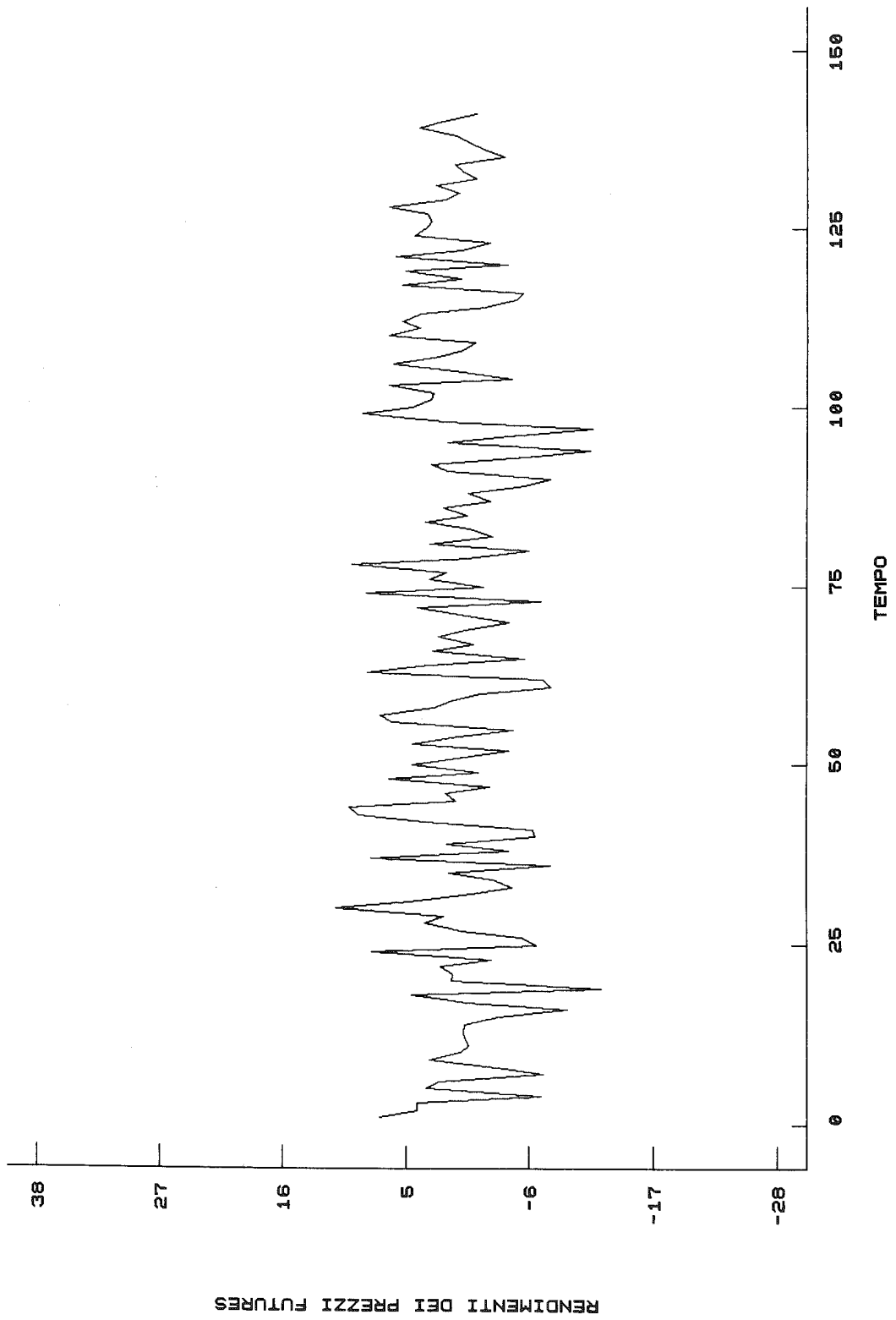


Figura 24

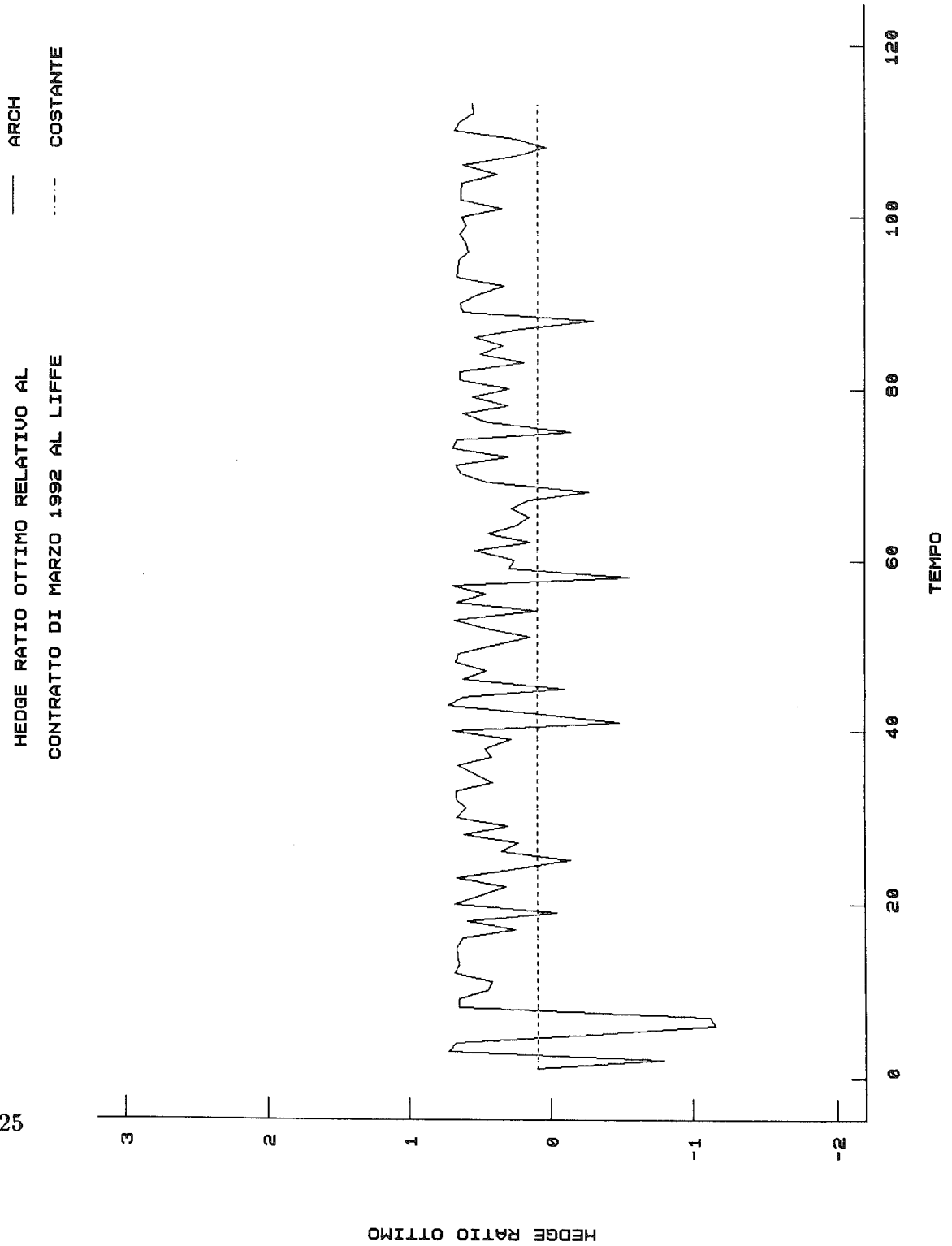


Figura 25

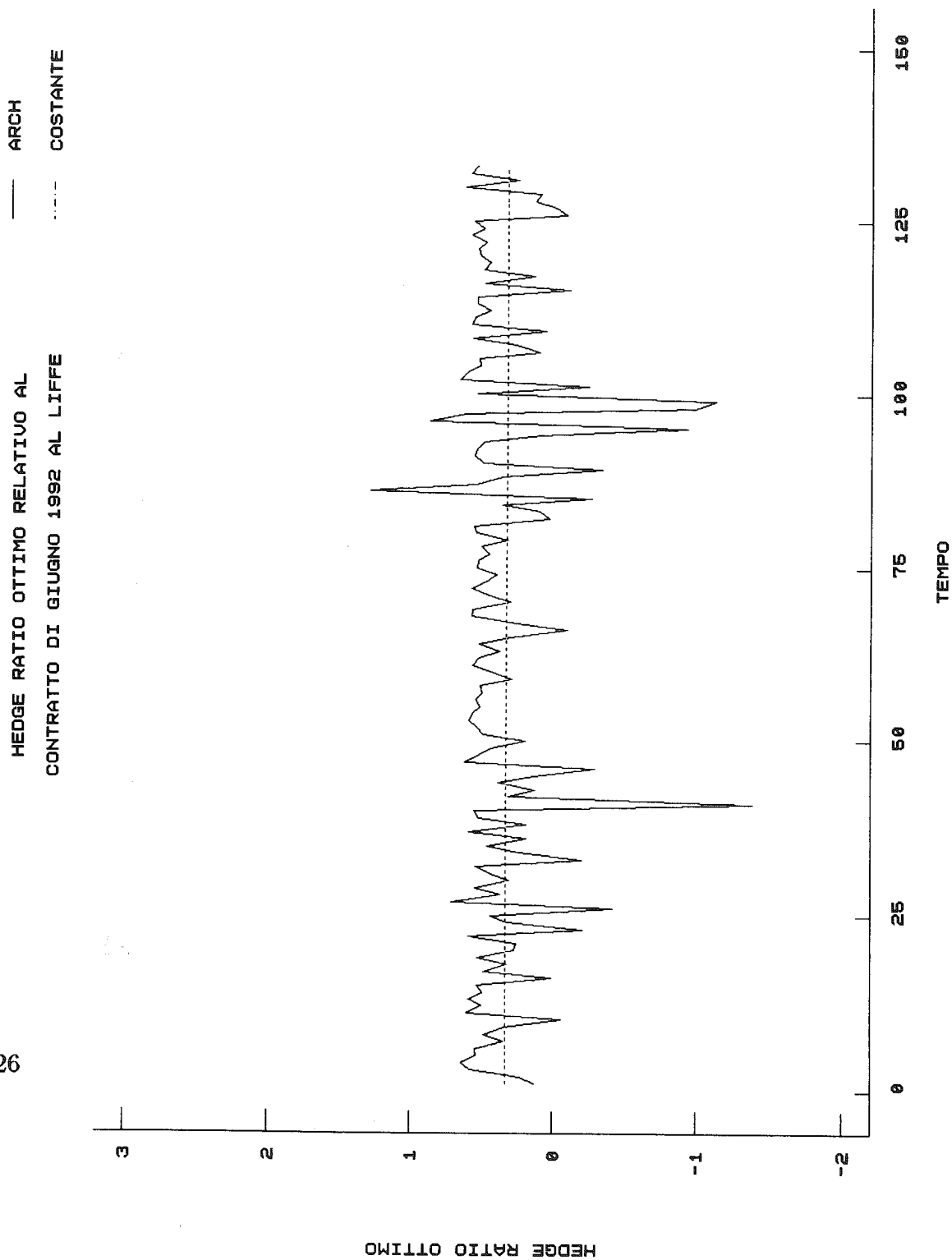


Figura 26

HEDGE RATIO OTTIMO RELATIVO AL  
CONTRATTO DI SETTEMBRE 1992 AL LIFFE

— ARCH

- - - - COSTANTE

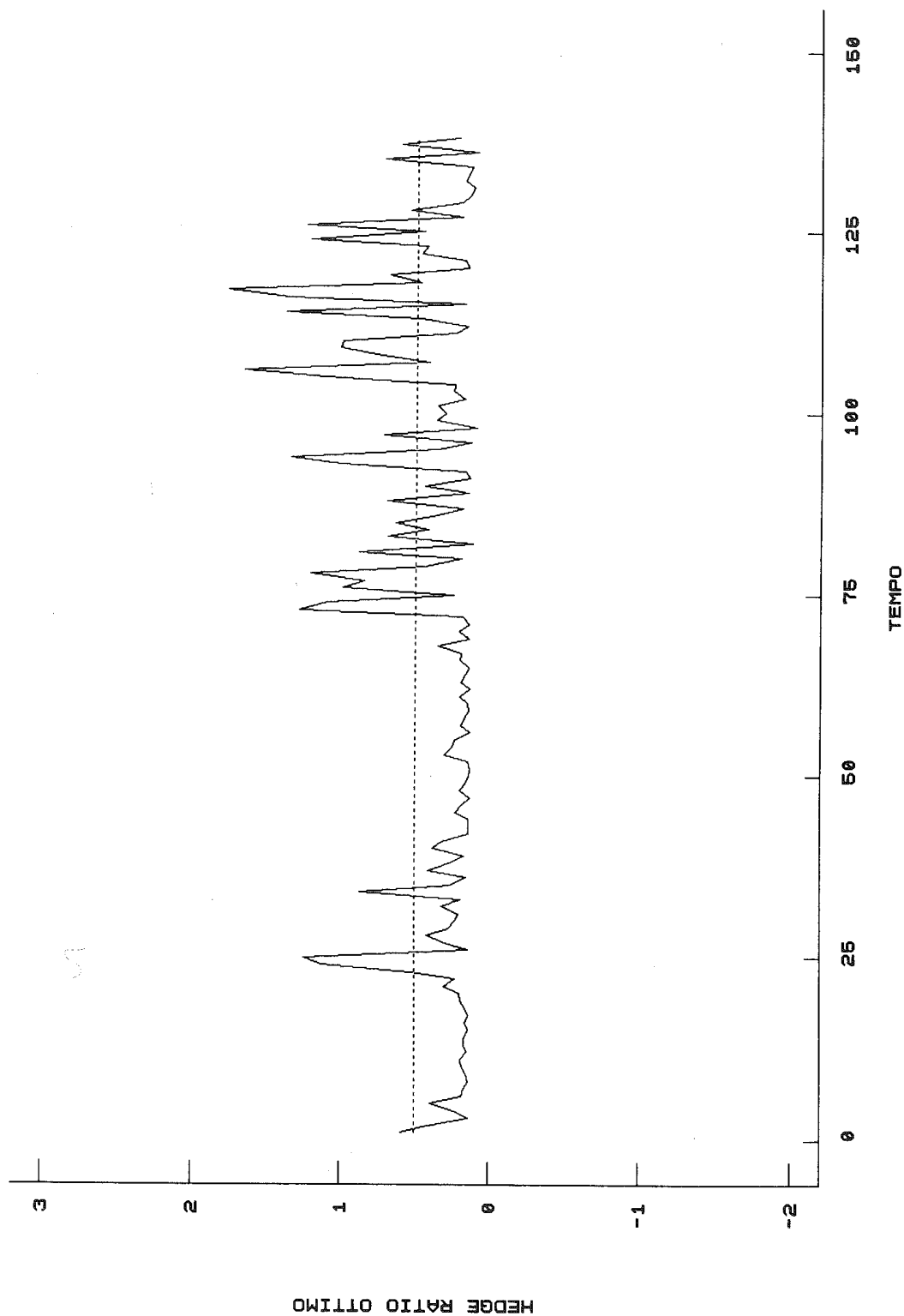


Figura 27

HEDGE RATIO OTTIMO RELATIVO AL  
CONTRATTO DI DICEMBRE 1992 AL LIFFE

— ARCH  
- - - - COSTANTE

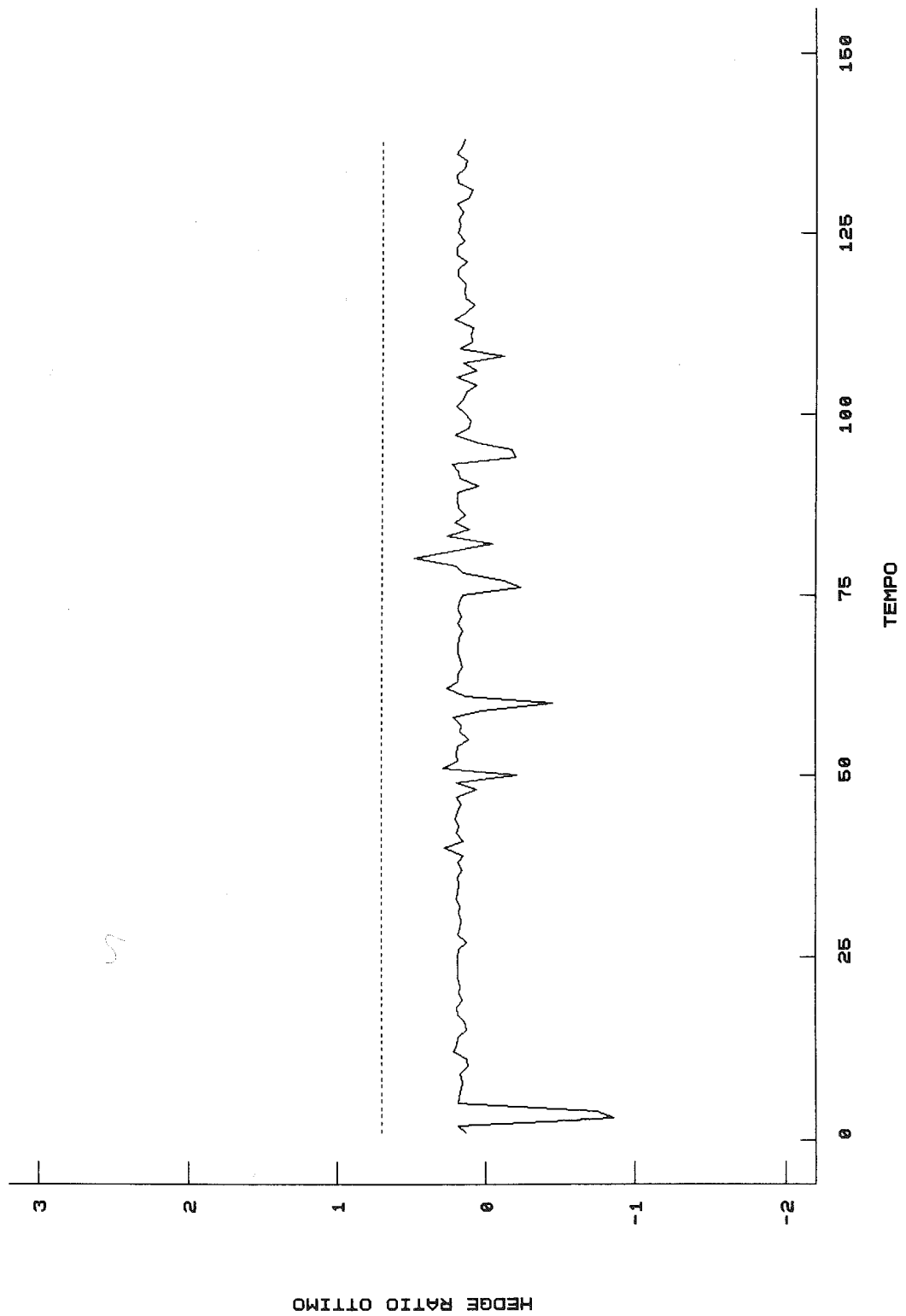


Figura 28

HEDGE RATIO OTTIMO RELATIVO AL  
CONTRATTO DI MARZO 1993 AL MIF

— ARCH

---- COSTANTE

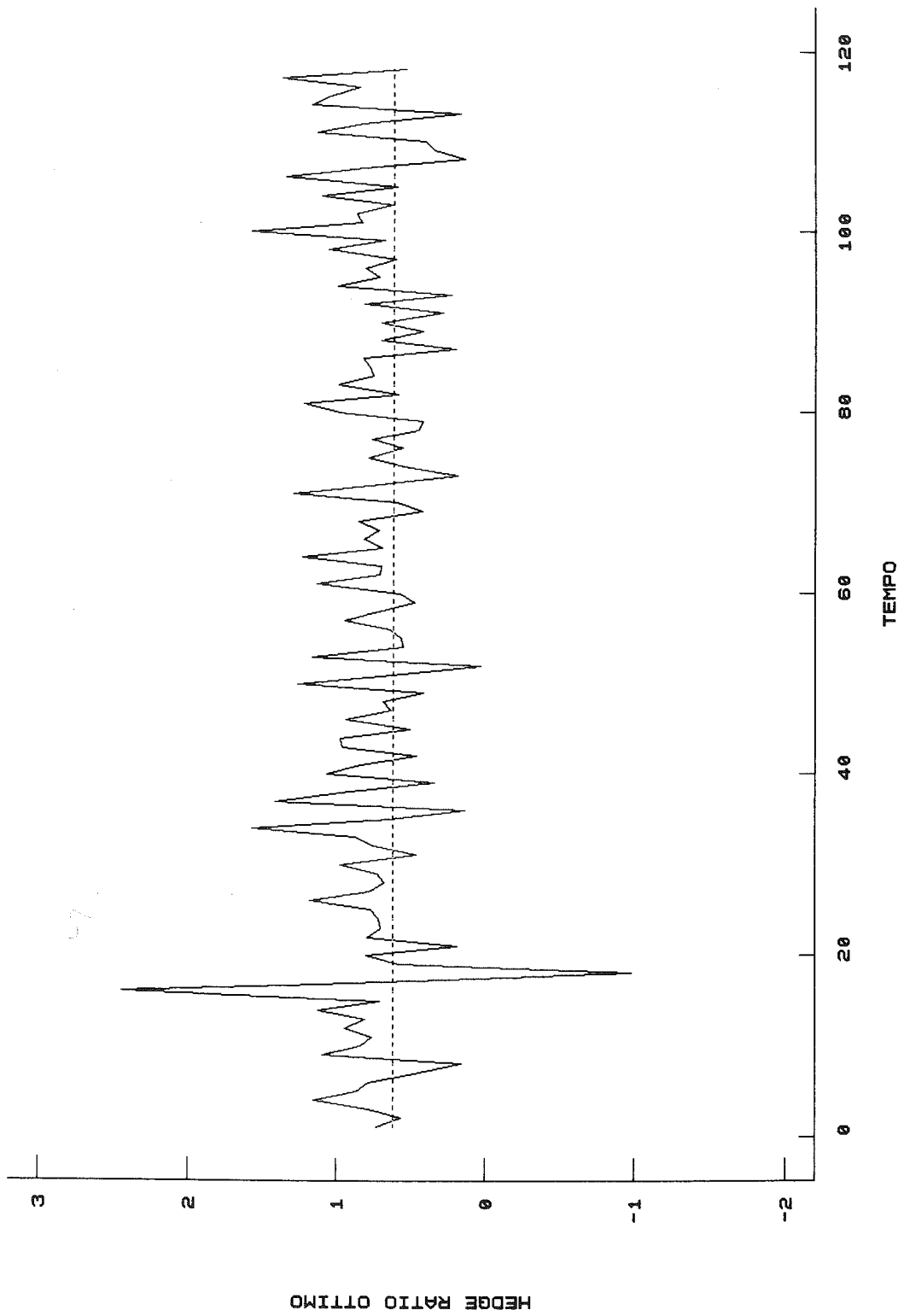


Figura 29

HEDGE RATIO OTTIMO RELATIVO AL  
CONTRATTO DI GIUGNO 1993 AL MIF

— ARCH  
- - - - COSTANTE

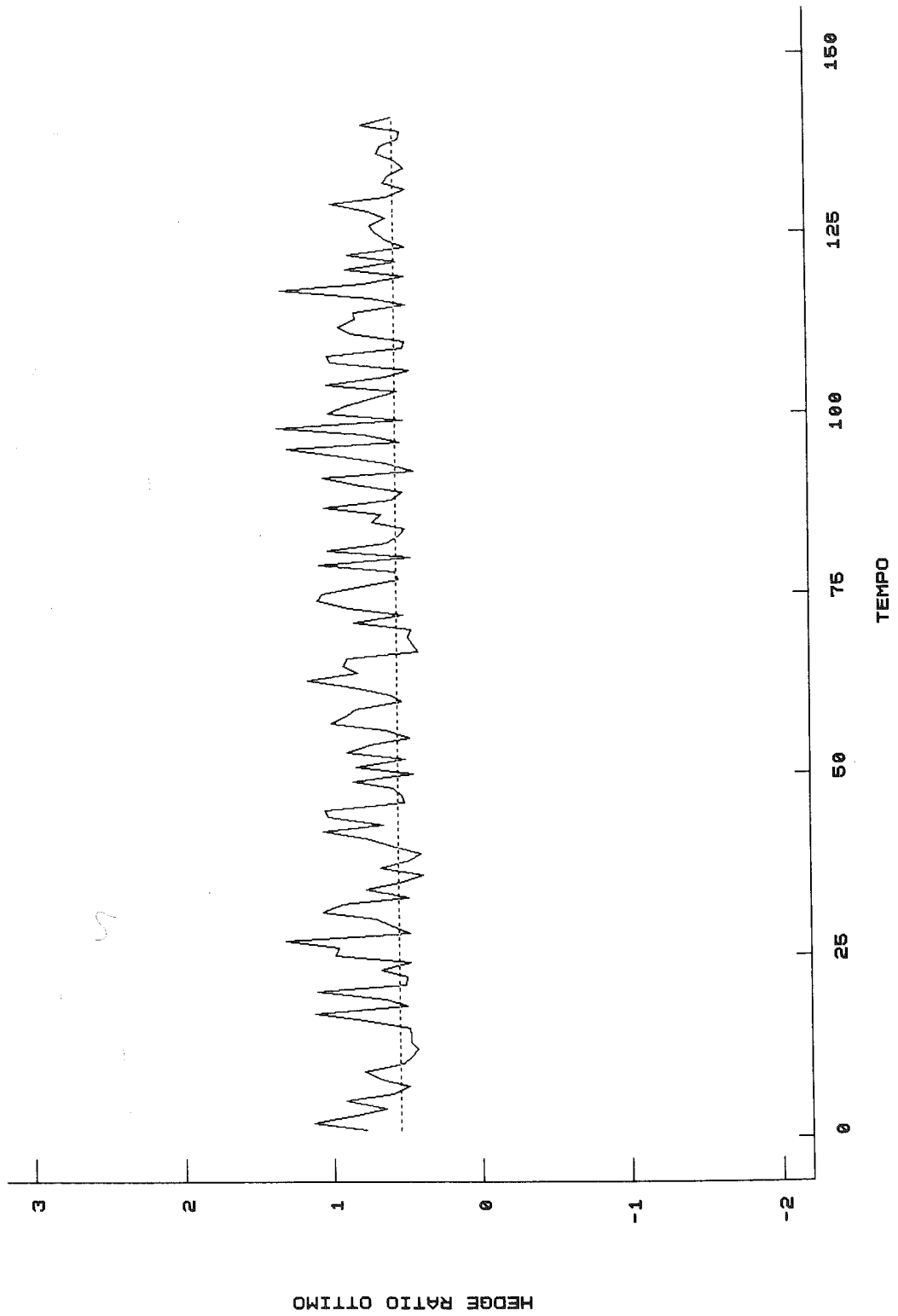


Figura 30



## Bibliografia

- [1] V. Akgiray. Conditional heteroschedsticity in time series of stock returns: evidence and forecasts. *Journal of Business*, 62 :55–80, 1989.
- [2] R. W. Anderson. Some determinants of the volatility of futures prices. *Journal of Futures Markets*, 5:331–348, 1985.
- [3] R. W. Anderson e J. P. Danthine. Cross hedging. *Journal of Political Economy*, 89:1182–1196, 1981.
- [4] T. W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley, New York, 1958.
- [5] T. Apostol. *Calcolo: Analisi 2*, volume 2. Bollati Boringhieri, Torino, 1978.
- [6] O. P. Attanasio. A note on estimation and hypothesis testing in multivariate ARCH models. Department of Economics, London School of Economics, 1988.
- [7] O. P. Attanasio e M. Edey. The impact of central bank interventions on spot foreign exchange market volatility. Department of Economics, London School of Economics, 1988.
- [8] Y. Baba, R. F. Engle, D. F. Kraft, e K. F. Kroner. Multivariate simultaneous generalized ARCH. Department of Economics, UCSD, 1989.
- [9] R. T. Baillie e T. Bollerslev. A multivariate generalized ARCH approach to modelling risk premia in forward foreign exchange rate markets. *Journal of International Money and Finance*, 9 :309–324, 1990.

- [10] R. T. Baillie e R. J. Myers. Modelling commodity price distributions and estimating the optimal futures hedge. Department of Economics, Michigan State University, 1989.
- [11] A. K. Bera, H. Y. Park, e E. Bubnys. The arch effects and efficient estimation of hedge ratios: Stock index futures. Department of Economics, University of Illinois, 1987.
- [12] E. K. Berndt, B. H. Hall, R. E. Hall, e J. A. Hausman. Estimation and inference in nonlinear structural models. *Annals of Economic and Social Measurement*, 4 :653-665, 1974.
- [13] A. K. Bhattacharaya, A. Ramjee, e B. Ramjee. The casual relationship between futures price volatility and the cash price volatility of GNMA securities. *Journal of Financial Markets*, 6:29-39, 1986.
- [14] L. Biggeri. Teoria e pratica dei numeri indici: vecchi orientamenti e recenti sviluppi. In *Relazione al XXXII Convegno SIS*, Sorrento, 1984. Volume II.
- [15] L. Biggeri e G. Ferrari. Il confronto degli aggregati nel tempo. Dipartimento Statistico, Università di Firenze, 1988.
- [16] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307-327, 1986.
- [17] T. Bollerslev. A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69 :542-547, 1987.
- [18] T. Bollerslev. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, 72 :498-505, 1990.
- [19] T. Bollerslev, R. Y. Chou, e K. F. Kroner. Arch modelling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52 :5-59, 1992.

- [20] T. Bollerslev, R. F. Engle, e J. M. Wooldrige. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, **96** :116–131, 1988.
- [21] G. E. P. Box e G. M. Jenkins. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden-Day, Oakland, California, revised edition, 1976.
- [22] T. S. Breusch e A. R. Pagan. The Lagrange multiplier test and its applications to model specification in econometrics. *Journal of Econometrics*, **47** :239–254, 1980.
- [23] L. Buzzigoli. *Modelli di Analisi delle Serie Temporali Finanziarie. Rassegna e Applicazioni di modelli di tipo ARCH. Dissertazione Finale Dottorato di Ricerca in Statistica, Università degli Studi di Padova, 1992.*
- [24] M. G. Castellino e J. C. Francis. Basis speculation in commodity futures: The maturity effect. *Journal of futures Markets*, **2**:195–206, 1982.
- [25] S. G. Cecchetti, R. E. Cumby, e S. Fligleski. Estimation of the optimal future hedge. *Review of Economics and Statistics*, **70** :623–630, 1988.
- [26] K. Chan, K. C. Chan, e G. A. Karolyi. Intraday volatility in the stock index and stock index futures markets. Department of Economics, Ohio State University, 1990.
- [27] P. K. Clark. A subordinate stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, **41**:135–155, 1973.
- [28] R. A. Connolly e W. A. Taylor. The impact of central bank interventions on spot foreign exchange market volatility. Graduate School of Business, University of North Carolina, 1990.
- [29] J. Conrad, M. N. Gulgkin, e G. Kaul. Asymmetric assimilation of information across securities. Graduate School of Business, University of North Carolina, 1990.

- [30] B. Cornell. The relationship between volume and price variability in futures markets. *Journal of Futures Markets*, 1:303–316, 1981.
- [31] R. Cornew, D. E. Town, e L. D. Crowson. Stable distributions, futures prices, and the and the measurement of trading performance. *Journal of Futures Markets*, 4:531–558, 1984.
- [32] M. J. Crowder. Maximum likelihood estimation for dependent observations. *Journal of the Royal Statistical Society*, 38 :45–63, 1976.
- [33] P. J. Davis. *The Mathematics of Matrices, a First Book of Matrix Theory and Linear Algebra*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1984.
- [34] R. Davison e J. G. Mac Kinnon. *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [35] G. De Santis e A. M. Sbordone. A CAPM with a multivariate generalized ARCH process: An empirical analysis of the Italian financial market. Graduate School of Business, University of Chicago, 1990.
- [36] A. S. Deif. *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*. Abbacus Press, New York, 2nd. edition, 1991.
- [37] P. J. Dhrymes. *Mathematics for Econometrics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1984.
- [38] F. X. Diebold. Modelling persistence in conditional variances: a comment. *Econometric Reviews*, 5 :51–56, 1986.
- [39] F. X. Diebold e M. Nerlove. The dynamics of exchange rate volatility: A multivariate latent factor ARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 4 :1–21, 1989.
- [40] F. X. Diebold e P. Pauly. Has the EMS reduced member-country exchange rate volatility. *Empirical Economics*, 13 :81–102, 1988.

- [41] K. Dusak. Futures trading and investors returns: An investigation of commodity market risk premiums. *Journal of Political Economy*, 81:1387–1406, 1973.
- [42] L. H. Ederington. The hedging performance of the New York futures markets. *Journal of Finance*, 34:157–170, 1979.
- [43] C. Engel, J. A. Frankel, K. A. Froot, e A. Rodrigues. Conditional mean variance efficiency of the us stock market. Department of Economics, University of Virginia, 1989.
- [44] C. Engel e A. Rodrigues. Tests of international CAPM with time-varying covariances. *Journal of Applied Econometrics*, 4 :119–138, 1989.
- [45] R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroschedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 :987–1008, 1982a.
- [46] R. F. Engle. A general approach to Lagrange multiplier model diagnostics. *Journal of Econometrics*, 20 :83–104, 1982b.
- [47] R. F. Engle. Estimates of the variance of U.S. inflation based upon the ARCH model. *Journal of Money Credit and Banking*, 15 :286–301, 1983.
- [48] R. F. Engle. Wald, likelihood ratio, and Lagrange multiplier tests in econometrics. In *The Handbook of Econometrics*, chapter 13, pages 775–826. Z. Griliches and M.D. Intriligator, North-Holland Amsterdam, 1984.
- [49] R. F. Engle, C. W. J. Granger, e D. Kraft. Combining competing forecasts of of inflation using a bivariate ARCH model. *Journal of Dynamics and Control*, 8 :151–165, 1984.
- [50] R. F. Engle, D. F. Hendry, e J. F. Richard. Exogeneity. *Econometrica*, 51 :277–304, 1983.
- [51] R. F. Engle e D. F. Kraft. Autoregressive conditional heteroscedasticity in multiple time series models. Department of Economics, UCSD, 1983.

- [52] R. F. Engle, D. M. Liliën, e R. P. Robins. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. *Econometrica*, 55 :391–407, 1987.
- [53] R. F. Engle e C. Mustafa. Implied ARCH models from options prices. *Journal of Econometrics*, 52 , 1992.
- [54] M. D. D. Evans e P. Wachtel. A modern look at asset pricing and short-term interest rates. NBER working paper no. 3245, 1990.
- [55] E. F. Fama. The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38 :34–105, 1965.
- [56] N. R. Farnum e L. W. Stanton. *Quantitative Forecasting Methods*. PWS-KENT, Boston, 1989.
- [57] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 2. John Wiley, New York, 1966.
- [58] S. Figlewski. Futures trading and volatility in the GNMA. *Journal of Finance*, 36:445–456, 1981.
- [59] R. E. Fink e R. B. Feduniak. *Futures Trading: Concepts and Strategies*. NYIF, New York, 1988.
- [60] K. R. French, G. W. Schwert, e R. F. Stambaugh. Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, 19 :3–30, 1987.
- [61] A. Giovannini e P. Jorion. The time variation of risk and return in the foreign exchange and stock markets. *Journal of Finance*, 44 :307–325, 1989.
- [62] C. W. J. Granger e P. Newbold. *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, New York, 2nd. edition, 1977.
- [63] R. Gray. Onions revisited. *Journal of Farm Economics*, 45:273–276, 1963.
- [64] P. E. Green e J. D. Carroll. *Mathematical Tools for Applied Multivariate Analysis*. Academic Press, New York, 1976.

- [65] W. H. Greene. *Econometric Analysis*. Mc Millan, New York, 1993.
- [66] J. A. Hall, B. W. Brorsen, e S. H. Irwin. The distribution of futures prices: A test of stable Paretian and mixture of normals hypotheses. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24:105–116, 1989.
- [67] B. P. Helms e T. F. Martell. An examination of the distribution of futures price change. *Journal of Futures Prices*, 5:259–272, 1985.
- [68] C. H. Hong. The integrated generalized autoregressive conditional heteroskedastic model: the process, estimation and monte carlo experiments. Department of Economics, UCSD, 1988.
- [69] D. A. Hsieh. Modelling heteroskedasticity in daily foreign exchange rate changes. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7 :307–317, 1989.
- [70] M. A. Hudson, R. M. Leuthold, e G. F. Sarassoro. Commodity futures price changes: Recent evidence for wheat, soybeans, and live cattle. *Journal of Futures Markets*, 7:287–302, 1987.
- [71] G. G. Judge, W. E. Griffiths, R. C. Hill, H. Lutkephol, e T. C. Lee. *The Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley, New York, 1980.
- [72] J. M. Karpoff. The relation between price changes and trading volume: A survey. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22:109–126, 1987.
- [73] R. W. Kolb. *Understanding Futures Markets*. Kolb Pub. Co., Miami, Florida, 1991.
- [74] A. D. Kraus. *Matrices for Engineers*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1987.
- [75] K. F. Kroner e S. Claessens. Optimal dynamic hedging portfolios and the currency composition of external debt. Department of Economics, University of Arizona, 1990.

- [76] K. F. Kroner e W. D. Lastrapes. The impact of exchange rate volatility on international trade: Estimates using the GARCH-M model. Department of Economics, University of Arizona, 1991.
- [77] S. Lang. *Algebra Lineare*. Bollati Boringhieri, Torino, 1970.
- [78] H. Lutkepohl. *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [79] J. R. Magnus e H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley, Chichester, 1988.
- [80] B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36 :394–419, 1963.
- [81] K. V. Mardia, J. K. Kent, e J. M. Bibby. *Multivariate Analysis*. Academic Press, New York, 1979.
- [82] A. M. Mathai e S. B. Provost. *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York, 1992.
- [83] T. H. McCurdy e I. Morgan. Testing the martingale hypothesis in deutsche mark futures with models specifying the form of heteroskedasticity. *Journal of Applied Econometrics*, 3 :187–202, 1988.
- [84] N. T. Milonas. Price variability and the maturity effect in futures markets. *Journal of Futures Markets*, 6:443–460, 1986.
- [85] A. M. Mood, F. A. Graybill, e D. C. Boes. *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, New York, 1974.
- [86] E. J. Moriarty e P. A. Tosini. Futures trading and price volatility of GMNA certificates-further evidence. *Journal of Futures Markets*, 5:633–641, 1985.
- [87] M. Najand e K. Yung. A garch examination of the relationship between volume and price variability in the futures markets. *Journal of Futures Markets*, 11:613–621, 1991.



- [88] D. B. Nelson. Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6 :318–334, 1990.
- [89] L. Ng. Tests of the CAPM with time varying covariances: A multivariate GARCH approach. *Journal of Finance*, 46 :1507–1521, 1991.
- [90] H. Y. Park e A. K. Bera. Interest rate volatility, basis risk and heteroskedasticity in hedging mortgages. *AREUEA Journal*, 15:79–97, 1987.
- [91] D. S. G. Pollock. *The Algebra of Econometrics*. John Wiley, New York, 1979.
- [92] M. Powers. Does futures trading reduce price fluctuations in the cash markets? *American Economic Review*, 60:460–464, 1970.
- [93] C. R. Rao. *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1973.
- [94] J. F. Richard. A note on the information matrix of the multivariate normal distribution. *Journal of Econometrics*, 3 :57–60, 1975.
- [95] D. J. S. Rutledge. A note on the variability of futures prices. *Review of Economics and Statistics*, 58:118–120, 1976.
- [96] P. A. Samuelson. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6:41–49, 1965.
- [97] G. W. Schwert. Stock volatility and the crash of 87. *Review of Financial Studies*, 3 :1990, 1990.
- [98] G. W. Schwert e P. J. Seguin. Heteroskedasticity in stock returns. *Journal of Finance*, 45 :1129–1155, 1990.
- [99] S. R. Searle. *Matrix Algebra Useful For Statistics*. John Wiley, Chichester, 1982.
- [100] E. Sentana. Identification and estimation of multivariate conditionally heteroskedastic latent factor models. Department of Economics, London School of Economics, 1988.

- [101] R. J. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley, New York, 1980.
- [102] J. C. So. The sub-Gaussian distribution of currency futures: Stable Paretian or nonstationary ? *Review of Economics and Statistics*, 69:100-107, 1987.
- [103] V. K. Srivastava e D.E.A. Giles. *Seemingly Unrelated Regression Equations Models: Estimation and Inference*. Marcel Dekker, New York, 1987.
- [104] N. E. Steenrod, P. R. Halmos, M. M. Schiffer, e J. A. Dieudonné. *How to Write Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [105] G. Steinbeck e R. Erickson. *The Futures Markets Dictionary*. NYIF, New York, 1988.
- [106] R. A. Stevenson e R. M. Bear. Commodity futures: Trends or random walks ? *Journal of Finance*, 25:65-81, 1970.
- [107] R. Tauchen e M. Pitts. The price variability-volume relationship on speculative markets. *Econometrica*, 51:485-505, 1983.
- [108] S. Taylor. *Modelling Financial Time Series*. John Wiley, New York, 1986.
- [109] S. J. Taylor. The behaviour of futures prices over time. *Applied Economics*, 17:713-734, 1985.
- [110] A. A. Weiss. ARMA models with ARCH errors. *Journal of Time Series Analysis*, 5 :1984, 1984.